EXAMEN PARTIEL

Durée : 2 heures, Documents, calculettes, ordinateurs et téléphones portables non autorisés.

Exercice I

Considérons la permutation de S_5,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 7 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner la décomposition de σ en produit de cycles de support disjoint ;

(2) Quelle est la signature de σ ?

(3) Calculer σ^{5001}.

Exercice II

On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ de sa base canonique. Soit

$$F_1 = \left\{ (x, y, z, t) \in E \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{rcl} 4x - 2y - z - t & = & 0 \\ 2x - y - 2z + t & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

et F_2 le sous-espace vectoriel de E engendré par $(1, 1, 2, 1)$ et $(1, 2, -1, -1)$.

(1) (a) Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de E. Trouver une base de F_1.

(b) Quelles sont les dimensions de F_1 et F_2 ?

(c) Montrer que $E = F_1 \oplus F_2$.

(2) Pour tout $u \in E$, on note $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$ les vecteurs correspondants à la décomposition $u = u_1 + u_2$ dans $E = F_1 \oplus F_2$. Déterminer les coordonnées de u_2 dans la base canonique de E en fonction de celles de u et en déduire les coordonnées de u_1.

(3) On définit l'application

$$p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \mapsto & u_2 \end{array}.$$

(a) Montrer que p est un endomorphisme de E.

(b) Quelles sont les coordonnées de $p(u)$ dans la base canonique de E en fonction de celles de u.

Exercice III

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension trois muni d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Soit φ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -10 & 3 & 2 \\ -20 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) Soit $f_1 = e_1 + 2e_2 + 4e_3$, $f_2 = e_1 + e_2 + 4e_3$ et $f_3 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E.

(2) Quelle est la matrice B de φ dans la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$?

(3) Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

(a) Déterminer P ;

(b) Déterminer P^{-1} ;

(c) Ecrire la relation entre A, B, P et P^{-1}.

(4) Calculer pour tout entier naturel n la matrice de φ^n dans la base $\mathcal{B}$.