Interrogation écrite du 7/11/19

Questions de cours. [*5 points*]

Les 5 questions suivantes sont indépendantes et $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
2. Donner la définition d'une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
3. Énoncer avec précision le théorème du rang.
4. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : E \to F$ une application linéaire injective. Montrer que si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E, alors $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une base de F.
5. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie avec $\mathsf{dim}(E) = \mathsf{dim}(F)$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Solution:

1. F est un sous-espace vectoriel de E si F est non vide et si pour tout $u, v \in F$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda u + v \in F$.
2. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit que $f : E \to F$ est une application linéaire si pour tout $u, v \in F$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.
3. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $\mathsf{dim}(E) = \mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}(f) + \mathsf{dim}\,\mathsf{Im}(f)$.
4. Comme f est injective, alors la famille $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est de cardinal $n = \mathsf{dim}(F)$. Il suffit donc de vérifier que la famille $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0$. Comme f est linéaire, on obtient $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = 0 = f(0)$ donc par injectivité de f : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Puisque la famille $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E, on obtient donc pour tout $i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$.
5. • Supposons que f est injective. Alors $\mathsf{Ker}(f) = \{0_E\}$ donc $\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}(f) = 0$. Donc d'après le théorème du rang, $\mathsf{dim}(F) = \mathsf{dim}(E) = \mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}(f) + \mathsf{dim}\,\mathsf{Im}(f) = \mathsf{dim}\,\mathsf{Im}(f)$. Or, $\mathsf{Im}(f) \subseteq F$ donc $F = \mathsf{Im}(f)$ et ainsi f est surjective.
   • Supposons f surjective. Alors $F = \mathsf{Im}(f)$ donc d'après le théorème du rang, $\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}(f) = 0$. Donc $\mathsf{Ker}(f) = \{0_E\}$ et ainsi f est injective.

Exercice 1. [*3 points*]

On considère la permutation suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Calculer σ^{2019}.

Solution:

1. On a $\sigma = (13625)(47)$.

2. L'ordre de σ est égal à $\text{ppcm}(2,5) = 10$ donc :

$$\sigma^{2020} = (\sigma^{10})^{202} = id.$$

Ainsi, $\sigma \circ \sigma^{2019} = id$ et on obtient alors :

$$\sigma^{2019} = \sigma^{-1} = (52631)(47).$$

Exercice 2. *[6 points]*

Notons E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et G l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ où 0_E est la fonction nulle.
3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les deux fonctions φ et ψ, définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Montrer que $\varphi \in F$, $\psi \in G$ et $f = \varphi + \psi$.

4. En déduire que $E = F \oplus G$.

Solution:

1. • F est un sous-espace vectoriel de E. En effet, F est non vide car la fonction nulle est paire. Soient $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$$

Donc la fonction $\lambda f + g$ est paire donc $\lambda f + g \in F$.

• G est un sous-espace vectoriel de E. En effet, G est non vide car la fonction nulle est impaire. Soient $f, g \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = -\lambda f(x) - g(x) = -(\lambda f + g)(x)$$

Donc la fonction $\lambda f + g$ est impaire donc $\lambda f + g \in G$.

2. Soit $f \in F \cap G$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-f(x) = f(-x) = f(x)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ donc f est la fonction nulle. Réciproquement, la fonction nulle appartient $F \cap G$. Donc $F \cap G$ est réduit à la fonction nulle.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \varphi(x) \text{ et } \psi(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = \psi(x).$$

Donc $\varphi \in F$ et $\psi \in G$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) + \psi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = f(x).$$

Donc $f = \varphi + \psi$.

4. On a vu que $F \cap G$ est réduit à la fonction nulle. De plus, la question précédente nous assure que $E = F + G$. Donc $E = F \oplus G$.

Exercice 3. [*6 points*]

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égaux à 2. Soit f l'application suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathsf{Ker}(f)$. Quelle est la dimension de $\mathsf{Ker}(f)$?
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?
4. Donner la matrice de l'application linéaire f dans la base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution:

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,
$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda f(P) + f(Q).$$
Donc f est une application linéaire.
2. Soit $P \in \mathsf{Ker}(f)$. Alors $f(P) = 0$ c'est-à-dire que $P(1) = 0$. Comme P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, alors il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = aX^2 + bX + c$. Comme $P(1) = 0$ alors $a + b + c = 0$ c'est-à-dire que $a = -b - c$ donc :
$$P = (-b - c)X^2 + bX + c = b(X - X^2) + c(1 - X^2).$$
Donc $\mathsf{Ker}(f) = \{b(X - X^2) + c(1 - X^2),\ b, c \in \mathbb{R}\} = \mathsf{Vect}(X - X^2, 1 - X^2)$. De plus, les polynômes $X - X^2$ et $1 - X^2$ ne sont pas colinéaires donc la famille $\{X - X^2, 1 - X^2\}$ est libre. Ainsi, une base de $\mathsf{Ker}(f)$ est $\{X - X^2, 1 - X^2\}$ et $\mathsf{dim}(\mathsf{Ker}(f)) = 2$.
3. L'application f n'est pas injective car $\mathsf{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$. Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie 3 et $\mathsf{Ker}(f)$ est de dimension 2, alors d'après le théorème du rang :
$$\mathsf{dim}(\mathsf{Im}(f)) = 1$$
donc $\mathsf{Im}(f) = \mathbb{R}$ ce qui veut dire que f est surjective.
4. Il faut évaluer l'application f sur la base canonique. On obtient :
$$\begin{cases} f(1) = 1 = 1.1 + 0X + 0X^2 \\ f(X) = 1 = 1.1 + 0X + 0X^2 \\ f(X^2) = 1 = 1.1 + 0X + 0X^2 \end{cases}$$
Ainsi, $\mathsf{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice bonus. [*Hors barème, à traiter seulement si tout a déjà été fait*]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application linéaire. Montrer que :

$$E = \mathsf{Im}(f) \oplus \mathsf{Ker}(f) \Longleftrightarrow \mathsf{Im}(f) = \mathsf{Im}(f^2).$$

Cette équivalence reste-t-elle vraie en dimension infinie ?

Solution: • Supposons que $E = \mathsf{Im}(f) \oplus \mathsf{Ker}(f)$ et montrons que $\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Im}(f^2)$. On a $\mathsf{Im}(f) \subset E$ donc $\mathsf{Im}(f^2) = f(\mathsf{Im}(f)) \subset \mathsf{Im}(f)$ c'est-à-dire que $\mathsf{Im}(f^2) \subset \mathsf{Im}(f)$. Montrons maintenant que $\mathsf{Im}(f) \subset \mathsf{Im}(f^2)$. Soit $y \in \mathsf{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $E = \mathsf{Im}(f) \oplus \mathsf{Ker}(f)$, alors il existe $(x_1, x_2) \in \mathsf{Im}(f) \times \mathsf{Ker}(f)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Donc $y = f(x) = f(x_1) \in \mathsf{Im}(f^2)$. On a donc $\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Im}(f^2)$.

• Supposons que $\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Im}(f^2)$ et montrons que $E = \mathsf{Im}(f) \oplus \mathsf{Ker}(f)$. Soit $x \in E$. On a $f(x) \in \mathsf{Im}(f) = \mathsf{Im}(f^2)$ donc il existe $x' \in E$ tel que $f(x) = f^2(x')$. Donc $f[x - f(x')] = 0$, d'où $y = x - f(x') \in \mathsf{Ker}(f)$. Si $z := f(x') \in \mathsf{Im}(f)$, on a donc $x = y + z$ avec $y \in \mathsf{Ker}(f)$ et $z \in \mathsf{Im}(f)$. Autrement dit, on vient de montrer que $E = \mathsf{Im}(f) + \mathsf{Ker}(f)$. De plus, d'après le théorème du rang : $\mathsf{dim}(\mathsf{Im}(f)) + \mathsf{dim}(\mathsf{Ker}(f)) = \mathsf{dim}(E)$ donc on en déduit que $E = \mathsf{Im}(f) \oplus \mathsf{Ker}(f)$.

En dimension infinie, ce résultat est faux. Par exemple, si on considère l'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P'$, on a $\mathsf{Im}(f^2) = \mathbb{R}[X] = \mathsf{Im}(f)$ et pourtant $\mathsf{Im}(f)$ et $\mathsf{Ker}(f)$ ne sont pas en somme directe car $\mathsf{Im}(f) = \mathbb{R}[X]$ et $\mathsf{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.