Corrigé du Partiel du 16/11/19

Exercice 1

On considère la permutation suivante

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles de support disjoints. (**1 pt**).
2. Déterminer la signature de σ. (**1 pt**).
3. Calculer σ^{2020}. (**1 pt**).

Solution:

1. On a : $\sigma = (1\,4\,7\,8) \circ (2\,6\,5) \circ (3\,9)$.
2. La signature d'un k-cycle est $(-1)^{k-1}$ donc comme la signature $\varepsilon : (\mathcal{S}_9, \circ) \to (\{-1, 1\}, \times)$ est un morphisme de groupes :
$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(1\,4\,7\,8)\,\varepsilon(2\,6\,5)\,\varepsilon(3\,9) = (-1)^{4-1}(-1)^{3-1}(-1)^{2-1} = 1.$$
3. L'ordre de σ est égal à $\operatorname{ppcm}(2, 3, 4) = 12$, donc $\sigma^{12} = id_{\mathcal{S}_9}$. Or, $2020 = 12 \times 168 + 4$, donc :
$$\sigma^{2020} = \sigma^4 = (2\,6\,5)^4 = (2\,6\,5).$$

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ une famille libre de vecteurs de E. On définit les sous-espaces vectoriels suivants, de E :

$$F = Vect(a_1 + a_2, a_3), \qquad G = Vect(a_1 + a_3, a_4) \qquad \text{et} \qquad H = Vect(a_1 + a_4, a_2).$$

1. Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants : $F \cap G$, $F \cap H$ et $G \cap H$. (**1,5 pts**)
2. La somme $F + G + H$ est-elle une somme directe ? (**1 pt**).
3. Trouver un vecteur v de $F + G + H$ qui admet deux décompositions différentes dans $F + G + H$. (**1 pt**).

Solution:

1. Soit $x \in F \cap G$. Alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{K}$ tels que :
$$x = \lambda_1(a_1 + a_2) + \lambda_2 a_3 = \lambda_3(a_1 + a_3) + \lambda_4 a_4$$
c'est-à-dire :
$$(\lambda_1 - \lambda_3)a_1 + \lambda_1 a_2 + (\lambda_2 - \lambda_3)a_3 - \lambda_4 a_4 = 0$$
Comme la famille $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est libre, on a alors :
$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

D'où $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$. Donc $x = 0_E$ et donc $F \cap G \subset \{0_E\}$. La réciproque est immédiate car F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Donc $F \cap G = \{0_E\}$. On montre par un raisonnement similaire que $F \cap H = \{0_E\}$ et $G \cap H = \{0_E\}$.

2. Posons $V := \mathsf{Vect}(a_1, a_2, a_3, a_4)$. Comme la famille $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est libre, alors $\mathsf{dim}(V) = 4$.
   F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de V car ils sont engendrés par des éléments de V. En particulier, $F + G + H$ est un sous-espace vectoriel de V. De plus, F, G et H sont de dimensions 2 car les vecteurs qui les engendrent ne sont pas colinéaires. Si la somme $F + G + H$ était directe, alors $\mathsf{dim}(F + G + H) = \mathsf{dim}(F) + \mathsf{dim}(G) + \mathsf{dim}(H) = 2 + 2 + 2 = 6 > 4 = \mathsf{dim}(V)$ ce qui n'est pas possible car $F + G + H$ est un sous-espace vectoriel de V. Donc la somme $F + G + H$ n'est pas directe.
3. Posons $v := a_1$. Alors v admet deux décompositions différentes :

$$\begin{aligned} v &= (-a_3) + (a_1 + a_3) + 0 \in F + G + H \\ &= (a_1 + a_2) + 0 + (-a_2) \in F + G + H \end{aligned}$$

Méthode différente :

On peut remarquer (d'après 1, le fait que $\mathsf{dim}(F) = \mathsf{dim}(G) = \mathsf{dim}(H) = 2$ et que $\mathsf{dim}(V) = 4$) que l'espace V est la somme directe de deux parmi F, G, H et donc il contient le troisième. Par exemple, $H \subset V = F \oplus G$. Si $v \in H$, on trouve alors (uniques) $v_F \in F$ et $v_G \in G$ tels que $v = v_F + v_G$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} v &= 0 + 0 + v \in F + G + H \\ v &= v_F + v_G + 0 \in F + G + H \end{aligned}$$

sont deux décompositions différentes de v pour tout $v \in H$ tel que $v \neq 0$.

EXERCICE 3

$\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + y - 3z).$$

1. Montrer que f est une application linéaire. (**1 pt**).
2. Ecrire la matrice $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2)$ de f relativement aux bases canoniques $\mathcal{C}_3 = (a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}_2 = (b_1, b_2)$ de $\mathbb{R}^2$. (**1 pt**).
3. On considère les bases respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ suivantes

$$\mathcal{C}_3' = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}_2' = (b_1, b_1 - b_2).$$

   (a) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}_3$ vers la base $\mathcal{C}_3'$. (**1 pt**).
   (b) Déterminer la matrice de passage Q de la base $\mathcal{C}_2$ vers la base $\mathcal{C}_2'$ et Calculer sa matrice inverse Q^{-1}. (**1 pt**).
   (c) Soit $M = \mathcal{M}(f; \mathcal{C}_3', \mathcal{C}_2')$ de f relativement aux bases $\mathcal{C}_3'$, $\mathcal{C}_2'$. Exprimer la matrice M en fonctions des matrices A, P et Q^{-1} et la déterminer explicitement. (**1 pt**).
   (d) Sachant que f est surjective, déterminer $Ker(f)$ sans aucun calcul. (**1 pt**).

Solution:

1. Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (\lambda x + x' - 2(\lambda y + y') + \lambda z + z', 2(\lambda x + x') + \lambda y + y' - 3(\lambda z + z')) \\ &= (\lambda(x - 2y + z) + x' - 2y' + z', \lambda(2x + y - 3z) + 2x' + y' - 3z') \\ &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z') \\ &= \lambda f(u) + f(v). \end{aligned}$$

   Donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

2. Il suffit d'évaluer f sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} f(1,0,0) = (1,2) \\ f(0,1,0) = (-2,1) \\ f(0,0,1) = (1,-3) \end{cases}$$

   Donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. (a) La matrice de passage de la base $\mathcal{C}_3$ vers la base $\mathcal{C}_3'$ est $P := \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_3') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) La matrice de passage de la base $\mathcal{C}_2$ vers la base $\mathcal{C}_2'$ est $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On remarque que $Q^2 = I_2$ donc $Q^{-1} = Q$.

   (c) D'après la formule du cours, on obtient : $M = Q^{-1}AP$. On trouve $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

   (d) Si f est surjective, alors $\mathsf{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. Donc d'après le théorème du rang :

$$3 = \mathsf{dim}(\mathbb{R}^3) = \mathsf{dim}(\mathsf{Im}(f)) + \mathsf{dim}(\mathsf{Ker}(f)) = 2 + \mathsf{dim}(\mathsf{Ker}(f)).$$

   Donc $\mathsf{Ker}(f)$ est de dimension 1. Il suffit de trouver un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ annulant f. La troisième colonne de M donne les composantes de $f(a_1, a_2, a_3)$ dans la base $\mathcal{C}_2'$. Puisque cette colonne est nulle, on a donc : $a_1 + a_2 + a_3 = (1, 1, 1) \in \mathsf{Ker}(f)$. Ainsi,

$$\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Vect}(1, 1, 1).$$

Exercice 4

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - 2f - 3id_E = 0$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E. (**1 pt**).
2. Montrer que $Im(f - 3id_E) \subset Ker(f + id_E)$ et $Im(f + id_E) \subset Ker(f - 3id_E)$. (**1 pt**).
3. Trouver deux nombres réels a et b tels que

$$(\forall x \in E), \qquad x = a(f + id_E)(x) + b(f - 3id_E)(x). \quad (\textbf{1 pt}).$$

4. Montrer que

$$E = Ker(f - 3id_E) \oplus Ker(f + id_E). \quad (\textbf{1 pt}).$$

5. En déduire que

$$dim\ (E) = dim\ Ker(f + id_E) + dim\ Ker(f - 3id_E). \quad (\textbf{0,5 pt}).$$

Solution:

1. f est un endomorphisme de E et on a : $f\circ(f-2id_E)=3id_E$ donc $f\circ(\frac{1}{3}f-\frac{2}{3}id_E)=id_E$. On a de même, $(\frac{1}{3}f-\frac{2}{3}id_E)\circ f=id_E$ Ainsi, f est bijective et son inverse est $f^{-1}=\frac{1}{3}f-\frac{2}{3}id_E$. Donc f est un automorphisme de E.

2. • Soit $y\in\mathsf{Im}(f-3id_E)$. Alors il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)-3x$. On a :

$$(f+id_E)(y)=f(y)+y=f^2(x)-3f(x)+f(x)-3x=(f^2-2f-3id_E)(x)=0.$$

Donc $y\in\mathsf{Ker}(f+id_E)$. Ainsi, $\mathsf{Im}(f-3id_E)\subset\mathsf{Ker}(f+id_E)$.

• Soit $y\in\mathsf{Im}(f+id_E)$. Alors il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)+x$. On a :

$$(f-3id_E)(y)=f(y)-3y=f^2(x)+f(x)-3f(x)-3x=(f^2-2f-3id_E)(x)=0.$$

Donc $y\in\mathsf{Ker}(f-3id_E)$. Ainsi, $\mathsf{Im}(f+id_E)\subset\mathsf{Ker}(f-3id_E)$.

Méthode différente : on a

$$(f+id_E)\circ(f-3id_E)=f^2-2f-3id_E=0 \tag{1}$$
$$(f-3id_E)\circ(f+id_E)=f^2-2f-3id_E=0 \tag{2}$$

Si $y\in\mathsf{Im}(f-3id_E)$, alors il existe $x\in E$ tel que $y=(f-3id_E)(x)$, d'où

$$(f+id_E)(y)=(f+id_E)(f-3id_E)(x)=0$$

d'après (1). De même, si $y\in\mathsf{Im}(f+id_E)$, alors il existe $x\in E$ tel que $y=(f+id_E)(x)$, d'où

$$(f-3id_E)(y)=(f-3id_E)(f+id_E)(x)=0$$

d'après (2).

3. Le couple $(a,b)=(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$ convient.

4. • Montrons que $E=\mathsf{Ker}(f-3id_E)+\mathsf{Ker}(f+id_E)$. Soit $x\in E$. Posons : $\begin{cases} x_1:=\frac{1}{4}(f(x)+x).\\ x_2:=-\frac{1}{4}(f(x)-3x).\end{cases}$

Alors on a d'apréès la question 2 : $\begin{cases} x_1\in\mathsf{Im}(f+id_E)\subset\mathsf{Ker}(f-3id_E).\\ x_2\in\mathsf{Im}(f-3id_E)\subset\mathsf{Ker}(f+id_E).\end{cases}$

De plus, $x=x_1+x_2$ d'après la question 3.

• Montrons que $\mathsf{Ker}(f-3id_E)\cap\mathsf{Ker}(f+id_E)=\{0_E\}$. Soit $x\in\mathsf{Ker}(f-3id_E)\cap\mathsf{Ker}(f+id_E)$. Alors $f(x)=3x$ et $f(x)=-x$ donc $4x=0_E$ et donc $x=0_E$. La réciproque est immédiate car $\mathsf{Ker}(f-3id_E)$ et $\mathsf{Ker}(f+id_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Finalement,

$$E=\mathsf{Ker}(f-3id_E)\oplus\mathsf{Ker}(f+id_E).$$

5. D'après la question précédente, on en déduit immédiatement en passant à la dimension que :

$$\dim(E)=\dim[\mathsf{Ker}(f-3id_E)\oplus\mathsf{Ker}(f+id_E)]=\dim(\mathsf{Ker}(f-3id_E))+\dim(\mathsf{Ker}(f+id_E))$$