Exercice 2

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$ et $\det(A+B)$. Que remarquez-vous ?

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4 = -5$; $\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+2 = 5$

$\det(AB) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -25$; $\det(A+B) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

On a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$; il s'agit d'une propriété qui vaut toujours. D'autre part, le fait que pour ces matrices A, B on ait $\det(A+B) = \det A + \det B$, n'est pas une propriété qui vaut généralement. On remarque toutefois que la somme $A+B$ de deux matrices inversibles A et B peut ne pas être inversible.

Exercice 4

Calculer le rang des marices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

- A : $rg(A) \geq 2$ car, par exemple(*), $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$. On décide si $rg(A) = 2$ ou 3 en calculant $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$
- B : $rg(B) \geq 2$ car, par exemple, les deux premières lignes sont l.i. (non proportionnelles). On décide si $rg(B) = 2$ ou 3 par le calcul de $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6-4 = 2 \neq 0$
- C : $2 \leq rg C \leq 3$ car les 2 premières colonnes de C sont lin. indép. (pas proportionnelles) et C est une matrice 3×4, de taille minimale 3.

(*) On illustre des méthodes différentes pour A, B, C, D

D : La méthode des pivots de Gauss donne la forme échelonnée de D :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-4L_1 \\ L_4 \leftarrow (L_4-L_1)/3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3-L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-L_2}]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 pivots $\Rightarrow rg(D) = 2$

$$\begin{array}{rrrr} -2 & -3 & 0 & -5 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} 4 & 9 & 6 & 7 \\ -4 & -8 & -4 & -8 \\ \hline 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} 1 & -1 & -5 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ \hline 0 & -3 & -6 & 3 \\ (0 & -1 & -2 & 1) \end{array}$$

EX. 6

(2) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$

(b) En déduire la valeur de Δ_n pour $n \geq 1$

(a) On développe Δ_{n+2} par rapport à la première colonne :

$$\Delta_{n+2} = 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}}_{n+2} - 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}}_{n+2}$$

Δ_{n+1}

on développe ce déter minant par rapport à la 1ère ligne

$$= 3\Delta_{n+1} - 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \cdots \\ 0 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \; 2 & 3 \end{vmatrix}}_{n+1} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$$

Δ_n

$\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$ définit une suite (Δ_n) par récurrence linéaire à 2 termes.

L'équation caractéristique associée à $\Delta_{n+2} - 3\Delta_{n+1} + 2\Delta_n = 0$ est $r^2 - 3r + 2 = 0$, càd $(r-1)(r-2) = 0$, avec deux racines réelles distinctes $r_1 = 1, r_2 = 2$.

Toute solution est de la forme $\Delta_n = \alpha 1^n + \beta 2^n$ avec (α, β) déterminés par $\begin{cases} \alpha + 2^2\beta = \Delta_2 \\ \alpha + 2^3\beta = \Delta_3 \end{cases}$. Or, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 6 - 6 = 15$, d'où $\begin{cases} \alpha + 4\beta = 7 \\ \alpha + 8\beta = 15 \end{cases}$ càd

$\beta = 2, \alpha = -1$. Donc $\Delta_n = -1 + 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} - 1$.

(3) Calculer le déterminant de la matrice $(i^j)_{1\le i,j\le n} = M$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n \\ \vdots & & & & \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$= n!\, V(1,2,3,\dots,n)$, où $V(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ est le Vandermonde (exercice 7)

$$= n! \prod_{1\le i<j\le n} (j-i) = n! \cdot \begin{bmatrix} (1\cdot 2\cdot 3\cdots (n-1)) \\ \cdot (1\cdot 2\cdots (n-2)) \\ \cdots \\ 1\cdot 2 \\ 1 \end{bmatrix} = n!(n-1)!\,(n-2)!\cdots 2!$$

$$= \prod_{k=2}^{n} k!$$

EX 8 n et p entiers, $p<n$. A $n\times p$, B $p\times n$. Calculer $\det(AB)$

$\boxed{n=3,\ p=2}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow B_1 \\ \leftarrow B_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ A_1 & A_2 \end{matrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} \overbrace{}^{A_1b_{11}+A_2b_{21}} & \overbrace{}^{A_1b_{12}+A_2b_{22}} & \overbrace{}^{A_1b_{13}+A_2b_{23}} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23} \end{pmatrix}$$

$$\det(AB) = \det(A_1b_{11}+A_2b_{21},\ A_1b_{12}+A_2b_{22},\ A_1b_{13}+A_2b_{23})$$

$$= b_{11}\underbrace{\det(A_1,\ A_1b_{12}+A_2b_{22},\ A_1b_{13}+A_2b_{23})} + b_{21}\det(A_2,\ A_1b_{12}+A_2b_{22},\ A_1b_{13}+A_2b_{23})$$

det est multilinéaire

quand on utilise la multilinéarité en la 2e et 3e variable on trouve une combinaison linéaire de termes

$\det(A_1,A_1,A_2)$, $\det(A_1,A_1,A_1)$, $\det(A_1,A_2,A_1)$, $\det(A_1,A_2,A_2)$

qui sont tous nuls car det est alterné

La même remarque vaut pour le 2e terme $b_{21}\det(\cdots)$

Ainsi $\det(AB)=0$.

$\boxed{p<n \text{ arbitraires}}$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}} = (A_1, \dots, A_p) \quad , B = (b_{hk})_{\substack{h=1,\dots,p \\ k=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_p \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(AB)_{ik}}_{\substack{\text{coefficient } (i,k) \\ \text{de } AB}} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk} \quad [i,k = 1, \dots, n]$$

, d'où (en omettant l'indice de somme $j \in \{1, \dots, p\}$)

$$\det(AB) = \det \begin{pmatrix} \sum a_{1j} b_{j1} & \sum a_{1j} b_{j2} & \cdots & \sum a_{1j} b_{jn} \\ \sum a_{2j} b_{j1} & \sum a_{2j} b_{j2} & \cdots & \sum a_{2j} b_{jn} \\ \vdots & & & \\ \sum a_{nj} b_{j1} & \sum a_{nj} b_{j2} & \cdots & \sum a_{nj} b_{jn} \end{pmatrix}$$

$$= \det \underbrace{\left(\sum^{p} A_j b_{j1}, \sum^{p} A_j b_{j2}, \dots, \sum^{p} A_j b_{jn} \right)}_{} \qquad (*)$$

n-linéaire et dans chaque argument on trouve une combinaison linéaire $\sum^{p} A_j b_{jk}$ de seulement p vecteurs colonne $A_1, \dots, A_p$ distincts. En appliquant la n-linéarité on trouvera une combinaison linéaire d'éléments de la forme

$$\det(\underbrace{A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_n}}_{n \text{ parmi } \{A_1,\dots,A_p\}}) = 0$$

n parmi $\{A_1, \dots, A_p\}$ $\Rightarrow$ au moins une répétition
$\Rightarrow$ $=0$ car det est alterné

$= 0$

REMS : (1) Pour appliquer la n-linéarité à $\det\left(\sum^{p} A_j b_{j1}, \sum^{p} A_j b_{j2}, \dots, \sum^{p} A_j b_{jn} \right)$ il faut "changer les noms" des indices de sommation :

$$\det\left(\sum_{j_1=1}^{p} A_{j_1} b_{j_1 1}, \sum_{j_2=1}^{p} A_{j_2} b_{j_2 2}, \dots, \sum_{j_n=1}^{p} A_{j_n} b_{j_n n} \right) = \sum_{j_1=1}^{p} \sum_{j_2=1}^{p} \cdots \sum_{j_n=1}^{p} b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n} \det(A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_n})$$

(2) Si $p \geq n$, alors $\det(AB)$ n'est pas nécessairement nul.
Si $p = n$, on a la formule usuelle $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
Si $p < n$, le développement d'$(*)$ permets d'écrire $\det(AB)$ comme combinaison linéaire de products de mineurs de taille n de A et de B :

$$\det(AB) = \sum_{J \in \mathcal{J}_p} \det(A_J) \det(B_J)$$

, où $\mathcal{J}_p$ = ensemble des suites strictement croissantes de p éléments $J = (j_1 < j_2 < \dots < j_p)$ dans $\{1, 2, \dots, n\}$

(FORMULE DE CAUCHY-BINET) $\qquad A_J = (A_{j_1}, \dots, A_{j_p})$; $B_J = \begin{pmatrix} B_{j_1} \\ B_{j_p} \end{pmatrix}$

Ex 9

(2) $t\in\mathbb{R}$: $(1,1,t),(1,t,1),(1,1,t)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si ils forment une famille libre. Ceci n'est jamais le cas, pour tout t, car $(1,1,t)$ apparait deux fois

IL FAUT SUPPOSER $\{u_1,\dots,u_m\}$ LIBRE

(3) E = ev sur $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. $\{u_1,\dots,u_m\}$ famille de vecteurs de E et $\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ famille de scalaires. On note $s=\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i$. Donner une condition nécessaire et suffisante afin que $\{u_1+s,u_2+s,\dots,u_m+s\}$ soit libre

· La famille $\{u_1+S,u_2+S,\dots,u_m+S\}$ est libre $\Leftrightarrow$ l'unique solution de $\lambda_1(u_1+S)+\lambda_2(u_2+S)+\dots+\lambda_m(u_m+S)=0_E$ est $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_m=0$.

Or, $(\lambda_1(1+\alpha_1)+\lambda_2\alpha_2+\dots+\lambda_m\alpha_m)u_1+(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2(1+\alpha_2)+\dots+\lambda_m\alpha_m)u_2+$
$\dots+(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\dots+\lambda_m(1+\alpha_m))u_m=0_E$

$$\underset{\{u_1,\dots,u_m\}\text{ libre}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}\lambda_1(1+\alpha_1)+\lambda_2\alpha_2+\dots+\lambda_m\alpha_m=0\\ \lambda_1\alpha_1+\lambda_2(1+\alpha_2)+\dots+\lambda_m\alpha_m=0\\ \vdots\\ \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\quad+\lambda_m(1+\alpha_m)=0\end{cases}$$

en système de m équations linéaires en $\lambda_1,\dots,\lambda_m$. Il possède une solution unique $\lambda_1=\dots=\lambda_m=0$ Si et seulement si la matrice A des coefficients a $\det(A)\neq 0$.

La matrice des coefficients est

$$A=\begin{pmatrix}1+\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m\\ \alpha_1 & 1+\alpha_2 & & \alpha_m\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_1 & \alpha_2 & & 1+\alpha_m\end{pmatrix}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}1+\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m\\ \alpha_1 & 1+\alpha_2 & & \alpha_m\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_1 & \alpha_2 & & 1+\alpha_m\end{vmatrix}\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_m\\ L_2\leftarrow L_2-L_m\\ \vdots\\ L_{m-1}\leftarrow L_{m-1}-L_m}}{=}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & & \vdots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -1\\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & -1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{m-1} & 1+\alpha_m\end{vmatrix}$$

$$\underset{C_m\leftarrow C_1+C_2+\dots+C_m}{=}\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & & 1 & 0\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{m-1} & 1+\alpha_1+\dots+\alpha_m\end{vmatrix}$$

développement par rapp. à la dernière colonne

$$=(1+\alpha_1+\dots+\alpha_m)\cdot\det(I_{m-1})$$
$$=1+\alpha_1+\dots+\alpha_m$$

Donc : la famille $\{u_1+S,\dots,u_m+S\}$ est libre $\Leftrightarrow 1+\alpha_1+\dots+\alpha_m\neq 0$.

Ex 10

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$ et en déduire que A est inversible. Calculer A^{-1}.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$A^3 - A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I$, d'où $A(A^2 - I) = A^3 - A = 4I$, càd $A\left(\frac{A^2 - I}{4}\right) = I$

de même, $\frac{A^2 - I}{4} A = I$, d'où A est inversible et

$A^{-1} = \frac{A^2 - I}{4} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

REM : (1) tout poly en A commute avec A,

d'où $A\left(\frac{A^2 - I}{4}\right) = \frac{A^2 - I}{4} \cdot A$

(2) toute matrice carrée qui possède une inverse à gauche (ou à droite) est automatiquement inversible.

(3) $E = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En développant par rapport à la 2^e colonne on a :

$\det E = (-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. On calcule la comatrice $\operatorname{com}(E)$ de E :

$$\operatorname{com}(E) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2i \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} i & 2i \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} i & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2i \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} i & 2i \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} i & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 3i & 1 \\ -2 & 2i & 2 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \frac{1}{\det(E)} \operatorname{com}(E)^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3i & 2i \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) Puisque A est triangulaire, $\det(A)$ est le produit des éléments sur la diagonale principale, càd $\det(A) = 1$ $(\neq 0)$. Donc A est inversible.

A^{-1} est caractérisée par la propriété que lorsque $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $Y = AX$, alors $X = A^{-1}Y$. On considère donc le système

$AX = Y$, càd $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 \\ \quad x_2 + \cdots + x_n = y_2 \\ \quad \ddots \\ \quad x_{n-1} + x_n = y_{n-1} \\ \quad x_n = y_n \end{cases}$ et on résout pour $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_m = y_1 \\ \quad x_2 + \cdots + x_m = y_2 \\ \quad \ddots \\ \quad x_{m-1} + x_m = y_{m-1} \\ \quad x_m = y_m \end{cases} \xrightarrow[j=1,\dots,m-1]{L_j \leftarrow L_j - L_m} \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} = y_1 - y_m \\ \quad x_2 + \cdots + x_{m-1} = y_2 - y_m \\ \quad \vdots \\ \quad x_{m-2} + x_{m-1} = y_{m-2} - y_m \\ \quad x_{m-1} = y_{m-1} - y_m \\ \quad x_m = y_m \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_j \leftarrow L_j - L_{m-1} \\ j=1,\dots,m-2}}{\sim} \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-2} = y_1 - y_m - (y_{m-1} - y_m) = y_1 - y_{m-1} \\ \quad x_2 + \cdots + x_{m-2} = y_2 - y_m - (y_{m-1} - y_m) = y_2 - y_{m-1} \\ \quad \ddots \qquad \vdots \\ \quad x_{m-2} = y_{m-2} - y_m - (y_{m-1} - y_m) = y_{m-2} - y_{m-1} \\ \quad x_{m-1} = y_{m-1} - y_m = y_{m-1} - y_m \\ \quad x_m = y_m = y_m \end{cases}$$

Par récurrence :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ \vdots \\ x_{m-2} = y_{m-2} - y_{m-1} \\ x_{m-1} = y_{m-1} - y_m \\ x_m = y_m \end{cases}$$

càd $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \; -1 & 0 \\ & & & 0 \; 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$