EXERCICE 1 • $A=\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique $\chi_A(X)=\det(A-XI)=\begin{vmatrix}-X&1\\2&1-X\end{vmatrix}=X(X-1)-2=X^2-X-2=(X+1)(X-2)$

valeurs propres : $\chi_A(\lambda)=0 \iff \lambda_1=-1, \lambda_2=2$ [$\chi_A(X)$ est scindé]

λ_1 et λ_2 ont multiplicité 1 $\rightsquigarrow$ (*)

• $\underset{[\lambda_1=-1]}{V(\lambda_1)}=\{v\in\mathbb{R}^2 : (A-\lambda_1 I)v=0\}$ $(=\ker(A-\lambda_1 I))$, $A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$

$v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in V(\lambda_1)\iff\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff x+y=0\iff \underset{x\in\mathbb{R}}{y=-x}\iff v=\begin{pmatrix}x\\-x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$

d'où $V(\lambda_1)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$, $\dim V(\lambda_1)=1$, base $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

• $\underset{[\lambda_2=2]}{V(\lambda_2)}=\{v\in\mathbb{R}^2 : (A-\lambda_2 I)v=0\}$, $A-\lambda_2 I=\begin{pmatrix}-2&1\\2&-1\end{pmatrix}$

$v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in V(\lambda_2)\iff\begin{pmatrix}-2&1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff -2x+y=0\iff \underset{x\in\mathbb{R}}{y=2x}\iff v=\begin{pmatrix}x\\2x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$

d'où $V(\lambda_2)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$, $\dim V(\lambda_2)=1$, une base est $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$

A est diagonalisable (car A est une matrice 2x2 qui possède deux valeurs propres réelles et distinctes)

• $B=\begin{pmatrix}7&3\\-9&-5\end{pmatrix}$

Poly caractéristique : $\chi_B(X)=\det(B-XI)=\begin{vmatrix}7-X&3\\-9&-5-X\end{vmatrix}=(X-7)(X+5)+27$

$=X^2-2X-8=(X-4)(X+2)$ [scindé]

valeurs propres : $\chi_B(\lambda)=0\iff\lambda_1=-2, \lambda_2=4$, de multiplicité 1 $\rightsquigarrow$ (*)

• $\underset{[\lambda_1=-2]}{V(\lambda_1)}=\{v\in\mathbb{R}^2 ; (B-\lambda_1 I)v=0\}$, $B-\lambda_1 I=\begin{pmatrix}9&3\\-9&-3\end{pmatrix}$

$v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in V(\lambda_1)\iff\begin{pmatrix}9&3\\-9&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff 3x+y=0\iff \underset{x\in\mathbb{R}}{y=-3x}\iff v=\begin{pmatrix}x\\-3x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$

d'où $V(\lambda_1)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\right\}$, $\dim V(\lambda_1)=1$, une base $\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\right\}$

• $\underset{[\lambda_2=4]}{V(\lambda_2)}=\{v\in\mathbb{R}^2 ; (B-\lambda_2 I)v=0$, $B-\lambda_2 I=\begin{pmatrix}3&3\\-9&-9\end{pmatrix}$

$v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in V(\lambda_2)\iff\begin{pmatrix}3&3\\-9&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff x+y=0\iff \underset{x\in\mathbb{R}}{y=-x}\iff v=\begin{pmatrix}x\\-x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$

(*) Si une valeur propre λ a multiplicité 1, alors l'espace propre correspondant a dimension 1 d'où $V(\lambda_2) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$, $\dim V(\lambda_2)=1$, une base $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

B est diagonalisable (car B est 2×2 et possède 2 valeurs propres distinctes)

- $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pol caractéristique $\chi_C(X) = \det(C - XI) = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 4 \\ -2 & 3-X & 2 \\ 2 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (3-X)\begin{vmatrix} -1-X & 4 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix}$

$= (3-X)\left[(1+X)(X-1)-8\right] = (3-X)(X^2-1-8) = (3-X)(X-3)(X+3) = -(X-3)^2(X+3)$ [scindé]

valeurs propres : $\chi_C(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3$, de multiplicité 2
$\lambda_2 = -3$ — " — 1

- $V(\lambda_1) = \{ v \in \mathbb{R}^3 : (C-\lambda_1 I)v = 0\}$, $C - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
$[\lambda_1 = 3]$

$v = \begin{pmatrix} x\\y\\z\end{pmatrix} \in V(\lambda_1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow -x+z=0 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} x\\y\\x\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1\\0\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0\\1\\0\end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$

d'où $V(\lambda_1) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$. Puisque $\begin{pmatrix} 1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0\\1\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnels, ils sont l.i. et donc forment une base de $V(\lambda_1)$. Donc $\dim V(\lambda_1) = 2$.

On peut conclure à ce point que C est diagonalisable, car χ_C est scindé et les dimensions des espaces propres sont maximales : $\dim V(\lambda_1) = 2 =$ multiplicité λ_1 (et $\dim V(\lambda_2) = 1 =$ multiplicité de λ_2 automatiquement)

- $V(\lambda_2) = \{ v \in \mathbb{R}^3 : (C - \lambda_2 I) v = 0\}$, $C - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
$[\lambda_2 = -3]$

$v = \begin{pmatrix} x\\y\\z\end{pmatrix} \in V(\lambda_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x+3y+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} -2z\\-z\\z\end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}$

d'où $V(\lambda_2) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$, de dim 1. Une base est $\left\{\begin{pmatrix} 2\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Pol caractéristique $\chi_D(X) = \det(D - XI) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 3 & -2-X & 1 \\ 7 & 2 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)\left[(2+X)(X-2)-2\right]$

$= (1-X)(X^2-4-2) = -(X-1)(X-\sqrt{6})(X+\sqrt{6})$ [scindé]

Valeurs propres : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \sqrt{6}, \lambda_3 = -\sqrt{6}$, multiplicité 1 (d'où D diagonalisable)

• $V(\lambda_1)=\left\{v\in\mathbb{R}^3 ;\ (D-\lambda_1 I)v=0\right\}$, $\quad D-I=\begin{pmatrix}0&0&0\\3&-3&1\\7&2&1\end{pmatrix}$

$[\lambda_1=1]$

$$v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V(\lambda_1)\Leftrightarrow (D-I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-3y+z=0\\7x+2y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+5y=0,\ y=-\frac{4}{5}x\\ z=-7x-2y=-7x+\frac{8}{5}x\\ \quad=-\frac{27}{5}x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow v=\begin{pmatrix}5x\\-4x\\-27x\end{pmatrix}, \text{ d'où } V(\lambda_1)=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}5\\-4\\-27\end{pmatrix}\right\}, \text{ de dim } 1 \text{ ; une base est } \left\{\begin{pmatrix}5\\-4\\-27\end{pmatrix}\right\}$$

• $V(\lambda_2)=\left\{v\in\mathbb{R}^3 ;\ (D-\lambda_2 I)v=0\right\}$, $\quad D-\sqrt{6}I=\begin{pmatrix}1-\sqrt{6}&0&0\\3&-2-\sqrt{6}&1\\7&2&2-\sqrt{6}\end{pmatrix}$

$[\lambda_2=\sqrt{6}]$

$$v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V(\lambda_2)\Leftrightarrow (D-\sqrt{6}I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-\sqrt{6})x=0\\3x-(2+\sqrt{6})y+z=0\\7x+2y+(2-\sqrt{6})z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\z=(2+\sqrt{6})y\end{cases}$$

$$v=\begin{pmatrix}0\\y\\(2+\sqrt{6})y\end{pmatrix}, \text{ où } V(\lambda_2)=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2+\sqrt{6}\end{pmatrix}\right\}, \text{ de dim } 1 \text{ ; une base est } \{$$

• $V(\lambda_3)=\left\{v\in\mathbb{R}^3 ;\ (D-\lambda_3 I)v=0\right\}$, $\quad D+\sqrt{6}I=\begin{pmatrix}1+\sqrt{6}&0&0\\3&-2+\sqrt{6}&1\\7&2&2+\sqrt{6}\end{pmatrix}$

$$v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V(\lambda_3)\Leftrightarrow (D+\sqrt{6}I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}(1+\sqrt{6})x=0\\3x+(-2+\sqrt{6})y+z=0\\7x+2y+(2+\sqrt{6})z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\z=(2-\sqrt{6})y\end{cases};\quad v=\begin{pmatrix}0\\y\\(2-\sqrt{6})y\end{pmatrix}, \text{ où } V(\lambda_3)=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2-\sqrt{6}\end{pmatrix}\right\};\ \dim V(\lambda_3)=1$$

• $E=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&5&0\\3&0&2\end{pmatrix}$

Poly caractéristique: $\chi_E(X)=\det(E-IX)=\begin{vmatrix}2-X&0&3\\0&5-X&0\\3&0&2-X\end{vmatrix}=(5-X)\begin{vmatrix}2-X&3\\3&2-X\end{vmatrix}$

$$=(5-X)\left[(2-X)^2-9\right]=(5-X)(X^2-4X-5)=(5-X)(X-5)(X+1)=-(X-5)^2(X+1)$$

Valeurs propres : $\lambda_1=5$ multiplicité 2

$\lambda_1=-1$ — " — 1

• $V(\lambda_1)=\left\{v\in\mathbb{R}^3 ;\ (E-\lambda_1 I)v=0\right\}$, $\quad E-5I=\begin{pmatrix}-3&0&3\\0&0&0\\3&0&-3\end{pmatrix}$

$[\lambda_1=5]$

$$v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V(\lambda_1)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-3&0&3\\0&0&0\\3&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow -x+z=0\Leftrightarrow v=\begin{pmatrix}x\\y\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$x,y\in\mathbb{R}$

d'où $V(\lambda_1) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, de base $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ (car cette famille génératrice est aussi libre) et donc $\dim V(\lambda_1)=2$

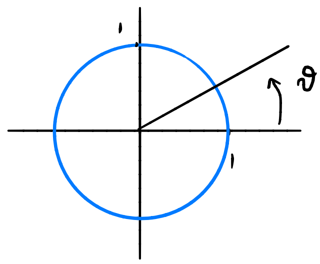
• $V(\lambda_2) = \{v\in\mathbb{R}^3 : (E-\lambda_2 I)v=0\}$, $E+I = \begin{pmatrix}3&0&3\\0&6&0\\3&0&3\end{pmatrix}$
[$\lambda_2=-1$]

$v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in V(\lambda_2) \iff \begin{pmatrix}3&0&3\\0&6&0\\3&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} x \quad + z = 0 \\ \quad y \quad = 0\end{cases} \iff v = \begin{pmatrix}x\\0\\-x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$

d'où $V(\lambda_2) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$, de dim 1 ; une base est $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

EXERCICE 2 $\mathbb{R}^2$, avec base canonique $\mathcal{B}=\{e_1,e_2\}$. $\mathcal{R}$ = rotation du plan de centre 0 et d'angle ϑ (← angle choisi positif comme dans le dessin

(1) $\mathcal{R}_\theta \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ est l'unique application linéaire $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ayant matrice $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ dans la base canonique



L'isomorphisme $\text{End}(\mathbb{R}^2) \to \text{Mat}(2\times 2, \mathbb{R})$
$f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
garantit que R_θ est un endomorphisme.

C'est bien la rotation de centre 0 et angle ϑ car $R_\theta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ et $R_\vartheta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$

(2) Polynome caractéristique $\chi_{R_\theta}(X) = \begin{vmatrix}\cos\theta - X & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta - X\end{vmatrix} = (\cos\theta - X)^2 + \sin^2\theta$

$= X^2 - 2\cos\vartheta\, X + \underbrace{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta}_{=1} = X^2 - 2\cos\vartheta\, X + 1$

$X^2 - 2\cos\vartheta\, X + 1 = 0 \iff X = \cos\vartheta \pm\sqrt{\cos^2\vartheta - 1}$ & $\Delta = \cos^2\vartheta - 1 \geq 0 \iff \cos\vartheta = \pm 1$

$\iff \vartheta = 0, \pi \pmod{2\pi} \iff \vartheta = k\pi, k\in\mathbb{Z}$

En particulier, R_θ n'a pas de valeurs propres dans $\mathbb{R}$ si $\vartheta \neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$

(3) $\vartheta = \pi \pmod{2\pi}$: $R_\pi = -id_{\mathbb{R}^2}$: valeur propre unique $\lambda=-1$, espace propre $V(\lambda) = \mathbb{R}^2$

(4) $\theta = 0 \pmod{2\pi}$: $R_{2\pi} = id_{\mathbb{R}^2}$: — " — $\lambda = 1$, — " —

EXERCICE 5 A antisymétrique $\iff A = -A^T$, $n\times n$

$\chi_A(X) = \det(A - XI) = \det(-A^T - XI) = \det((-A - XI)^T) = \det(-A - XI) = (-1)^n \det(A + XI)$

$= (-1)^n \chi_A(-X)$. Ainsi : χ_A est pair si n est pair ; impair si n impair.

Ex4 $m\geq 1$, $\mathbb{R}_{2m}[X]$, $f\in \mathrm{End}(\mathbb{R}_{2m}[X])$ déf par $f(P)=(X^2-1)P'-2mXP$

(2) $\lambda\in\mathbb{R}$ est une valeur propre de f s'il existe $P\neq 0$, $P\in\mathbb{R}_{2m}[X]$ tel que

$f(P)=\lambda P$, on résout l'ODE $(X^2-1)P'-2mXP=\lambda P$, qui est séparable:

$(X^2-1)P'=(\lambda+2mX)P \underset{(P\neq 0)}{\Leftrightarrow} \dfrac{P'}{P}=\dfrac{\lambda+2mX}{X^2-1}$. Intégration par rapport à X donne

$\displaystyle\int \frac{1}{P}\overbrace{P'dX}^{dP}=\int\frac{\lambda+2mX}{X^2-1}dP$; $\quad \dfrac{\lambda+2mX}{X^2-1}=\dfrac{A}{X-1}+\dfrac{B}{X+1}=\dfrac{(A+B)X+(A-B)}{X^2-1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=2m\\ A-B=\lambda\end{cases}\Rightarrow A=m+\dfrac{\lambda}{2},\ B=m-\dfrac{\lambda}{2}$

d'où

$$\int\frac{dP}{P}=\left(m+\frac{\lambda}{2}\right)\int\frac{dX}{X-1}+\left(m-\frac{\lambda}{2}\right)\int\frac{dX}{X+1}$$

$\ln|P|=(m+\frac{\lambda}{2})\ln|X-1|+(m-\frac{\lambda}{2})\ln|X+1|+C_0$, C_0 constant

$\quad=\ln\left(|X-1|^{m+\frac{\lambda}{2}}|X+1|^{m-\lambda/2}\right)+C_0$

$|P|=e^{C_0}|X-1|^{m+\frac{\lambda}{2}}|X+1|^{m-\frac{\lambda}{2}}$

d'où $P(X)=C(X-1)^{m+\frac{\lambda}{2}}(X+1)^{m-\frac{\lambda}{2}}$ où $C\in\mathbb{R}$ (et $C=0$ donne la solution $P=0$ qu'on avait exclu au début)

$P(X)\in\mathbb{R}_{2m}[X]\Leftrightarrow P(X)$ est un polynome de degré $\leq 2m$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m+\frac{\lambda}{2}\in\{0,1,2,\dots\}\\ m-\frac{\lambda}{2}\in\{0,1,2,\dots\}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\lambda}{2}\in\{-m,-m+1,\dots\}\\ \frac{\lambda}{2}\in\{m,m-1,\dots\}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{\lambda}{2}\in\{-m,-m+1,\dots,m-1,m\}$

$[\,m+\frac{\lambda}{2}+m-\frac{\lambda}{2}\leq 2m \Leftarrow$ toujours vrai $]$

Conclusion: $\forall\lambda=2k$, $k\in\underbrace{\{-m,-m+1,\dots,m-1,m\}}_{2m+1\text{ éléments}}$ est une valeur propre de f de vecteur propre $P_k(X)=(X-1)^{m+k}(X+1)^{m-k}\in\mathbb{R}_{2m}[X]$.

(3) On note $V(2k)$ l'espace propre correspondant, càd $V(2k)=\mathrm{Vect}\{P_k\}$

On a $\displaystyle\bigoplus_{k=-m}^{m}V(2k)=\mathbb{R}_{2m}[X]$ (espaces propres correspondants à valeurs propres distincts sont en somme directe et la somme directe est de dimension $2m+1$ et donc coïncide avec $\mathbb{R}_{2m}[X]$)

$\{P_k\}_{k=-m}^{m}$ est une base de $\mathbb{R}_{2m}[X]$ formée par vecteurs propres, d'où f est diagonalisable.