Interrogation écrite du 7/11/19

Questions de cours. [*5 points*]

Les 5 questions suivantes sont indépendantes et $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
2. Donner la définition d'une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
3. Énoncer avec précision le théorème du rang.
4. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : E \to F$ une application linéaire injective. Montrer que si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E, alors $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une base de F.
5. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie avec $\mathsf{dim}(E) = \mathsf{dim}(F)$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 1. [*3 points*]

On considère la permutation suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Calculer σ^{2019}.

Exercice 2. [*6 points*]

Notons E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et G l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ où 0_E est la fonction nulle.
3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les deux fonctions φ et ψ, définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$
Montrer que $\varphi \in F$, $\psi \in G$ et $f = \varphi + \psi$.
4. En déduire que $E = F \oplus G$.

Exercice 3. [*6 points*]

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 2. Soit f l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathsf{Ker}(f)$. Quelle est la dimension de $\mathsf{Ker}(f)$?
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?
4. Donner la matrice de l'application linéaire f dans la base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice bonus. [*Hors barème, à traiter seulement si tout a déjà été fait*]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application linéaire. Montrer que :

$$E = \mathsf{Im}(f) \oplus \mathsf{Ker}(f) \iff \mathsf{Im}(f) = \mathsf{Im}(f^2).$$

Cette équivalence reste-t-elle vraie en dimension infinie ?