Université de Lorraine-Site de Metz — Année universitaire 2019-2020
Département de Mathématiques — L2 Mathématiques UE : Algèbre linéaire 2

Examen Partiel du 16 novembre 2019

**Durée : 02 heures.**
**Tous les résultats de tous les exercices doivent être justifiés.**
**Aucun document n'est autorisé.**
**Le sujet comporte deux pages.**

**Le barème est sur 26,5 points. La note finale sera ramenée à une note sur 20.**

---

## Questions de cours

(1) Enoncer le théorème de la base incomplète. (**2 pts**).
(2) Donner la définition de la somme directe de $k$ sous-espaces vectoriels $(E_i)_{1\leq i\leq k}$, $k$ est un entier supérieur ou égal à 2. (**2 pts**).
(3) Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u$ une application linéaire de $E$ dans $F$.

1. Montrer que $Im(u) = u(E)$ est un sous-espace de $F$. (**0,5 pt**).
2. Montrer que le noyau, $Ker(u)$, de $u$ est un sous-espace de $E$. (**0,5 pt**).
3. On suppose, dans cette question que $E$ est de dimension finie. Donner une relation entre les trois entiers : $dim(E)$, $dim\ Ker(u)$ et $dim\ Im(u)$. (**2 pts**).

---

## Exercice 1

On considère la permutation suivante

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer $\sigma$ en produit de cycles de support disjoints. (**1 pt**).
2. Déterminer la signature de $\sigma$. (**1 pt**).
3. Calculer $\sigma^{2020}$. (**1 pt**).

---

## Exercice 2

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ une famille libre de vecteurs de $E$. On définit les sous-espaces vectoriels suivants, de $E$ :

$$F = Vect(a_1 + a_2, a_3), \qquad G = Vect(a_1 + a_3, a_4) \qquad \text{et} \qquad H = Vect(a_1 + a_4, a_2).$$

1. Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants : $F \cap G$, $F \cap H$ et $G \cap H$. (**1,5 pts**)
2. La somme $F + G + H$ est-elle une somme directe ? (**1 pt**).
3. Trouver un vecteur $v$ de $F + G + H$ qui admet deux décompositions différentes dans $F + G + H$. (**1 pt**).

## Exercice 3

$\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
On considère l'application $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + y - 3z).$$

1. Montrer que $f$ est une application linéaire. (**1 pt**).
2. Donner la matrice $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2)$ de $f$ relativement aux bases canoniques $\mathcal{C}_3 = (a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}_2 = (b_1, b_2)$ de $\mathbb{R}^2$. (**1 pt**).
3. On considère les bases respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ suivantes

$$\mathcal{C}'_3 = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}'_2 = (b_1, b_1 - b_2).$$

   (a) Déterminer la matrice de passage $P$ de la base $\mathcal{C}_3$ vers la base $\mathcal{C}'_3$ ainsi que sont inverse $P^{-1}$. (**2 pts**).
   (b) Déterminer la matrice de passage $Q$ de la base $\mathcal{C}_2$ vers la base $\mathcal{C}'_2$. (**1 pt**).
   (c) Soit $M = \mathcal{M}(f; \mathcal{C}'_3, \mathcal{C}'_2)$ de $f$ relativement aux bases $\mathcal{C}'_3$, $\mathcal{C}'_2$. Ecrire la relation entre les matrices $A$, $M$, $P$ et $Q$ puis calculer $M$. (**2 pts**).

---

## Exercice 4

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $f$ un endomorphisme non injectif de $E$. On pose

$$f^0 = id_E, \qquad f^{k+1} = f^k \circ f, \qquad N_k = Ker(f^k) \quad \text{et} \quad I_k = Im(f^k), \quad (k \in \mathbb{N}).$$

1. Montrer que pour tout entier naturel $k$,

$$N_k \subset N_{k+1} \qquad \text{et} \qquad I_{k+1} \subset I_k. \qquad (\textbf{1 pt})$$

2. Vérifier que l'ensemble $A = \{dim(N_k);\ k \in \mathbb{N}\}$ admet un plus grand élément $m$ (**0,5 pts**).
3. Montrer que l'ensemble $B = \{k \in \mathbb{N};\ N_k = N_{k+1}\}$ admet un plus petit élément (**1pt**). Déduire qu'il existe un entier naturel $p$ tel que

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \qquad \begin{cases} k < p \Longrightarrow N_k \neq N_{k+1}, \\ k \geq p \Longrightarrow N_k = N_{k+1}. \end{cases} \qquad (\textbf{1 pt})$$

4. Montrer que $p \leq n$. (**1 pt**).
   *Idée : Vérifier que si $k \leq p$ alors $k \leq dim(N_k)$.*
5. Montrer que

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \qquad \begin{cases} k < p \Longrightarrow I_k \neq I_{k+1}, \\ k \geq p \Longrightarrow I_k = I_{k+1}. \end{cases} \qquad (\textbf{1 pt})$$

6. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$. (**1 pt**).
   *Idée : On pourra remarquer que, pour tout $x \in E$, $f^p(x) \in I_p = I_{2p}$.*

---

**Fin de l'énoncé.**