CORRIGÉS SUCCINTS (FEUILLE DE TD n°1)

AVERTISSEMENT: ces corrigés sont succincts et parfois réduits à des indications sur la méthode de solution. N'hésitez pas à me contacter pour plus de détails (ou pour me signaler une erreur... ça peut arriver...)
Ces corrigés ne comprennent pas les exercices corrigés pendant les TD.

EXERCICE 7

Les fonctions $x \overset{f_1}{\mapsto} \cos x$, $x \overset{f_2}{\mapsto} \cos(2x)$ et $x \overset{f_3}{\mapsto} \cos(3x)$ sont lin. indép. dans l'espace vectoriel réel $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On va montrer que si

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \quad (= \text{fonction nulle}), \qquad (*)$$

alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
En effet, si on évalue $(*)$ en $x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1 \cos(\frac{\pi}{2}) + \lambda_2 \cos(\pi) + \lambda_3 \cos(\frac{3}{2}\pi) = 0 \\ \lambda_1 \cos(\frac{\pi}{4}) + \lambda_2 \cos(\frac{\pi}{2}) + \lambda_3 \cos(\frac{3}{4}\pi) = 0 \\ \lambda_1 \cos(\frac{\pi}{6}) + \lambda_2 \cos(\frac{\pi}{3}) + \lambda_3 \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \text{ càd } \begin{cases} -\lambda_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_3 = 0 \\ \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 = 0 \end{cases} \text{ d'où } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

EXERCICE 9

$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \text{ et } z - t = 0\}$

(1) E est un sev de $\mathbb{R}^4$ car $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)$ satisfait $x-y=0$ et $z-t=0$, càd $0_{\mathbb{R}^4} \in E$, et E est fermé pour les opérations d'addition et multiplication par scalaires de $\mathbb{R}^4$: $\forall (x,y,z,t), (x',y',z',t') \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda(x,y,z,t) + (x',y',z',t') \in E$. En effet:

$$\lambda(x,y,z,t) + (x',y',z',t') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t') \text{ et}$$

$$\begin{cases} (\lambda x + x') - (\lambda y + y') = \lambda(x - y) + (x' - y') = 0 \\ (\lambda z + z') - (\lambda t + t') = \lambda(z - t) + (z' - t') = 0 \end{cases} \text{ car } \begin{cases} x - y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x' - y' = 0 \\ z' - t' = 0 \end{cases}$$

(2) Base de E: $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ;\ x = y,\ z = t\} = \{(x,x,z,z) \in \mathbb{R}^4,\ x,z \in \mathbb{R}\}$
$= \{x(1,1,0,0) + z(0,0,1,1) ;\ x,z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$

ceci montre que $\{u = (1,1,0,0),\ v = (0,0,1,1)\}$ est une famille génératrice de E.
Étant formé par deux vecteurs non colinéaires, cette famille est aussi libre, donc une base de E.

(3) Un exemple de base de $\mathbb{R}^4$ qui est obtenue en complétant cette base de E est $\{u, v, e_1, e_3\}$ où e_j est le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On peut par ex. montrer que cette famille (qui est formée par 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$) est libre, ou bien qu'elle est génératrice. Pour cette deuxième possibilité on peut par ex. remarquer que $u-e_1=e_2$ et $v-e_3=e_4$, d'où
$\forall (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ on a $(x,y,z,t)=xe_1+y(u-e_1)+ze_3+t(v-e_3)\in \mathrm{Vect}\{u,v,e_1,e_3\}$.

EXERCICE 11

$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ déf par $h(x,y)=(x-y,-3x+3y)$

(2) h n'est ni injective ni surjective

h n'est pas injective car $\mathrm{Ker}(h)\neq\{0_{\mathbb{R}^2}\}$. En effet, par inspection on peut voir que si $x=y$, alors $h(x,y)=(0,0)$, d'où par ex. $(1,1)\in\mathrm{Ker}(h)$.
Formellement : $\mathrm{Ker}(h)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ h(x,y)=(0,0)\}$

$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ (x,y) \text{ est solution de } \begin{cases} x-y=0\\ -3x+3y=0\end{cases}\right\}$$

càd $x=y$

h n'est pas surjective car
$\mathrm{Im}(h)=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2;\ \exists (x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } (a,b)=h(x,y)\}$

$$h(x,y)=(a,b)\iff\begin{cases}x-y=a\\-3x+3y=b\end{cases}\iff\begin{cases}x-y=0\\0=3a+b\end{cases}$$

ce système possède une solution (x,y) si et seulement si il est compatible, càd $3a+b=0$

Donc $\mathrm{Im}(h)=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2;\ 3a+b=0\}$
$=\{(a,-3a)\in\mathbb{R}^2;\ a\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\{(1,-3)\}$

Par ex. $(1,1)\notin\mathrm{Im}(h)$. [ce qu'on pourrait voir directement et conclure que h n'est pas surjective. Par contre, ici, il y a une méthode pour calculer $\mathrm{Im}(h)$]

(3) $\mathrm{Ker}(h)=\{(x,x)\in\mathbb{R}^2;\ x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\{(1,1)\}$
$\mathrm{Im}(h)=\mathrm{Vect}\{(1,-3)\}$
Une famille formée par un unique vecteur v est libre si et seulement si $v\neq 0$.
Dans les deux cas les vecteurs générateurs donnent la base cherchée.

EXERCICE 12

$f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z,t)=(x+y+z+t,\ x+2y+3z+4t)$

(1) $\mathcal{B}_n=$ base canonique de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_2}(f)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}$$

2. $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : f(x,y,z,t) = (0,0)\}$

$$= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{cases} \quad (S) \right\}$$

On résout (S) en appliquant la méthode des pivots de Gauss à la matrice des coefficients de (S) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ càd}$$

$$\begin{cases} x = z+2t \\ y = -2z-3t \end{cases}, \quad t,z \in \mathbb{R}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{(z+2t, -2z-3t, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; z,t \in \mathbb{R}\}$

$$= \mathrm{Vect}\{(1,-2,1,0), (2,-3,0,1)\}$$

Les deux vecteurs générateurs ne sont pas colinéaires et donc ils forment une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Puisque $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, f n'est pas injective.

3. $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ càd f est surjective.

<u>Preuve directe</u> Si e_1, e_2 sont les deux premiers vecteurs de $\mathcal{B}_4$, on a $f(e_1) = (1,1)$ et $f(e_2) = (1,2)$, qui sont deux vecteurs non colinéaires dans $\mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ et $\dim \mathrm{Im}(f) \geq 2$ entraînent $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ et $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$.

<u>Au moyen du thm du rang</u>, On a $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker}(f) = 4-2 = 2$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$. Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

<u>Ex 14</u>

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ de matrice dans les bases canoniques $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; f(x,y,z,t) = 0\} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

On applique la méthode de Gauss à A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_2 - \frac{L_3}{4}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, d'où le système donné

est équivalent à $\begin{cases} x + 3z = 0 \\ y - z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ et

$\mathrm{Ker}(f) = \{(-3z, z, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \,;\, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(-3,1,1,0)\}$, droite vectorielle, dont une base est $\{(-3,1,1,0)\}$

2. D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im} f = 3$. Puisque $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^3$, on doit avoir l'égalité. Donc $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$ et f est bien surjective.

Le rang de A coïncide avec le rang de f et est donc 3.

EX 15

Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En appliquant la méthode des pivots de Gauss on trouve 3 pivots, d'où le rang de A est 3 (détails omis)

EX 17

$\dim E = 3$, $f \in \mathrm{End}(E)$. Déterminer $\mathrm{rg} f$ dans chacun des cas suivants :

1. $f \neq 0$, $f^2 = 0$
2. $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$

CORRIGÉ

$\mathrm{Ker}(f^2) = \{x \in E;\ f(f(x)) = 0\} = \{x \in E;\ f(x) \in \mathrm{Ker} f\}$

$f^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}(f^2) = E \Rightarrow \forall x \in E \ \ f(x) \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f$

Donc : $0 \neq \mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Im} f \leq \dim \mathrm{Ker} f \neq 3$ car $f \neq 0$

car $f \neq 0$

Puisque $\mathrm{rg}(f) + \dim(\ker f) = 3$ (thm rang), on conclut que $\mathrm{rg}(f) = 1$ & $\dim \ker(f) = 2$.

2. $\exists u \in E$ s.t. $f^2(u) \neq 0$, donc, en particulier, $u \neq 0$ et $f(u) \neq 0$. On montre que $(u, f(u), f^2(u))$ est une famille libre. En effet, supposons que $\alpha u + \beta f(u) + \gamma f^2(u) = 0$. On applique deux fois f à :

$$\left.\begin{array}{ll} & \alpha u + \beta f(u) + \gamma f^2(u) = 0 \\ \text{On obtient} & \alpha f(u) + \beta f^2(u) + \gamma \underbrace{f^3(u)}_{=0} = 0 \\ \text{et} & \alpha f^2(u) + \beta \underbrace{f^3(u)}_{=0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} \alpha u + \beta f(u) + \gamma f^2(u) = 0 \\ \alpha f(u) + \beta f^2(u) = 0 \\ \alpha f^2(u) = 0 \end{array}\right.$$

càd $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Puisque $f(u), f^2(u) \in \mathrm{Im}(f)$, on a $\mathrm{rg} f \geq 2$. Puisque f n'est pas un isomorphisme (car f iso $\Rightarrow f^3$ iso, tandis que $f^3 = 0$), alors $\mathrm{rg} f \neq 3$. Par conséquent, $\mathrm{rg} f = 2$.

Ex 20

$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ déf par $f(P) = P - (X-2)P'$

3. $\ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] ; \; P - (X-2)P' = f(P) = 0\}$

$P \in \mathbb{R}_2[X] \iff P(X) = aX^2 + bX + c$

$$\begin{aligned} f(P)(X) &= aX^2 + bX + c - (X-2)(2aX + b) \\ &= aX^2 + \cancel{bX} + c - 2aX^2 + 4aX - \cancel{bX} + 2b \\ &= -aX^2 + 4aX + (2b + c) \end{aligned}$$

$$f(P)(X) = 0 \iff \begin{cases} -a = 0 \\ 4a = 0 \\ 2b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{array}{l} a = 0 \\ c = -2b \end{array}$$

d'où $\ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] ; \; P(X) = b(X-2), \; b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{X-2\}$

$\mathrm{Im}(f) = \{Q \in \mathbb{R}_2[X] ; \; \exists P \in \mathbb{R}_2[X] ; \; f(P) = Q\}$

Si $Q(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, et $P(X) = aX^2 + bX + c$, ceci signifie

$\alpha X^2 + \beta X + \gamma = -aX^2 + 4aX + (2b + c)$, càd

$$\begin{cases} -a & = \alpha \\ 4a & = \beta \\ 2b + c & = \gamma \end{cases}$$

Les $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ pour lesquels ce système possède des solutions a, b, c sont ceux pour lesquels $\beta = -4\alpha$ (pas de condition sur γ)

Donc $\mathrm{Im}(f) = \{ Q \in \mathbb{R}_2[X] ; Q(X) = \alpha X^2 - 4\alpha X + \gamma ; \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \}$

4.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

si $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors

$f(P) = -aX^2 + 4aX + (2b + c)$

d'où

$f(1) = 1 \qquad [a = b = 0, c = 1]$

$f(X) = 2 \qquad [a = c = 0, b = 1]$

$f(X^2) = -X^2 + 4X \quad [b = c = 0, a = 1]$

5. $\mathcal{B}' = \{1, X-2, (X-2)^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

$\mathcal{B}'$ est une famille de 3 vecteurs et $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, d'où il suffira de montrer que $\mathcal{B}'$ est libre. Supposons donc que $\lambda_1 + \lambda_2 (X-2) + \lambda_3 \underbrace{(X-2)^2}_{X^2 - 4X + 4} = 0$

Donc $\lambda_3 X^2 + (\lambda_2 - 4\lambda_3) X + (\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3) = 0$

Puisque $\{1, X, X^2\}$ est libre, l'unique combinaison linéaire de ces vecteurs égale au polynôme nul est celle où tous les coefficients sont 0 : on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

, d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (système linéaire homogène triangulaire)

Ainsi $\mathcal{B}'$ est une base.

6. La j-ème colonne de la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ contient les coefficients du j-ème vecteur de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, càd

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & X-2 & (X-2)^2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

L'inverse P^{-1} de P est la matrice B avec la propriété que pour tous $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

si $Y = PX$, alors $X = BY$

$$Y = PX \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = y_1 \\ \quad x_2 - 4x_3 = y_2 \\ \quad\quad x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = y_3 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_1 = y_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ \quad = y_1 + 2y_2 + 8y_3 - 4y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ x_2 = \quad y_2 + 4y_3 \\ x_3 = \quad\quad y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = BY \text{ avec } P^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$\begin{tikzcd} \underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}_2[x]} \arrow[r, "id"] \arrow[rrr, bend left, "f = id^\circ \circ f \circ id"] & \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}_2[x]} \arrow[r, "f"] & \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}_2[x]} \arrow[r, "id^\circ"] & \underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}_2[x]} \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(id^\circ \circ f \circ id)$$
$$= \underbrace{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id^\circ)}_{P^{-1}} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \underbrace{\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id)}_{P}$$

Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) P$ (et on peut la calculer...)

EXERCICE 21 $u, v \in End(E)$, E de dimension finie (à ajouter pour

(1) $\ker(u) \subset \ker(u^2)$, car si $x \in \ker(u)$, alors $u(x) = 0_E$, d'où $u^2(x) = u(u(x)) =$ $= u(0_E) = 0_E$, càd $x \in \ker(u^2)$.

(2) $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}\, u$, car si $y \in \mathrm{Im}(u^2)$, alors $\exists x \in E$ tel que $y = u^2(x)$, d'où $y = u(\underbrace{u(x)}_{\in E}) \in \mathrm{Im}\, u$

(3) $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = u(\ker(u^2))$

$\supset$: $y \in u(\ker u^2) \Rightarrow \exists x \in \ker(u^2)$ tel que $y = u(x) \Rightarrow \exists x \in E$ tel que $u^2(x) = 0$ et $y = u(x) \Rightarrow y = u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ et $u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = 0 \Rightarrow y \in \mathrm{Im}\, u \cap \ker u$

$\subset$: $y \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) \Rightarrow \exists x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $\underbrace{0 = u(y) = u^2(x)}_{\text{càd } x \in \ker(u^2)}$
$\Rightarrow y = u(x)$ et $x \in \ker(u^2) \Rightarrow y \in u(\ker(u^2))$

(4) On remplace $u^2 = u \circ u$ par $v \circ u$ dans (3) :

$\subset$: $y \in u(\ker(v \circ u)) \Rightarrow \exists x \in \ker(v \circ u)$ tel que $y = u(x) \Rightarrow \exists x \in E$ tel que $v(u(x)) = 0$ et $y = u(x) \Rightarrow y = u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ et $v(y) = v(u(x)) = 0 \Rightarrow y \in \mathrm{Im}(u) \cap \ker(v)$

$\subset$: $y \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u) \Rightarrow \exists x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $\underbrace{0 = v(y) = v(u(x))}_{\text{càd } x \in \mathrm{Ker}(v \circ u)}$

$\Rightarrow y = u(x)$ et $x \in \mathrm{Ker}(v \circ u)$

$\Rightarrow y \in u(\mathrm{Ker}(v \circ u))$

5. On considère $u|_{\mathrm{Ker}(u^2)} : \mathrm{Ker}(u^2) \to E$. C'est une application linéaire d'image $u(\mathrm{Ker}(u^2))$. On applique le théorème du rang :

$$\dim \mathrm{Ker}(u^2) = \dim \underbrace{\mathrm{Ker}(u|_{\mathrm{Ker}(u^2)})}_{\substack{\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u^2) \\ \| \\ \mathrm{Ker}(u) \text{ d'après (1)}}} + \dim \underbrace{u(\mathrm{Ker}(u^2))}_{\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)}$$

Donc :

$$\dim \mathrm{Ker}(u^2) - \dim \mathrm{Ker}(u) = \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u))$$

càd

$$\dim \mathrm{Ker}(u^2) = \dim \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)) = 0$$

$\Updownarrow$ $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$ car $\mathrm{Ker}(u^2) \supset \mathrm{Ker}(u)$ d'après (1).

$\Updownarrow$ $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$