CHAPITRE I : ALGEBRES DE LIE

§1 DÉFINITIONS ET PREMIERS EXEMPLES

EXEMPLE $M_m(\mathbb{K})$ = matrices $m\times m$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou plus généralement $\mathbb{K}$ = corps commutatif de caractéristique $\neq 2$)

- espace vectoriel (e.v.) sur $\mathbb{K}$
- produit de matrices

  associatif : $\forall A,B,C\in M_m(\mathbb{K})$ $A(BC)=(AB)C$

  non-commutatif : en général, $AB\neq BA$
- $[A,B]=AB-BA\in M_m(\mathbb{K})$ (commutateur de A et B)
  - "mesure" la non-commutativité du produit
  - dépend de façon linéaire de A et de B (d'après les lois distributives du produit de matrices)
  - alterné : $\forall A\in M_m(\mathbb{K})$ $[A,A]=0$

    ($\Leftrightarrow$ anti-commutatif : $[B,A]=BA-AB=-(AB-BA)=-[A,B]$)
    (si car($\mathbb{K}$)$\neq 2$)
  - non-associatif

$[\cdot,\cdot]:M_m(\mathbb{K})\times M_m(\mathbb{K})\to M_m(\mathbb{K})$ est le crochet de Lie sur $M_m(\mathbb{K})$

On dit que $\mathbb{K}$ a caractéristique finie s'il existe $n\in\{1,2,3,\dots\}$ tel que $n.1=0$. Le plus petit $n>0$ tel que $n.1=0$ est alors la caractéristique de $\mathbb{K}$. Si un tel n n'existe pas on dit que $\mathbb{K}$ est de caractéristique 0, écrit car($\mathbb{K}$)=0.

EG car($\mathbb{R}$)=0
car($\mathbb{C}$)=0
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{0,1\}$
nombres pairs — impairs
+ et . selon règles pairs/impairs
car($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)=2

L'e.v. $M_m(\mathbb{K})$ muni du produit $[\cdot,\cdot]$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$, usuellement notée $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{K})$

REM : On associera une algèbre de Lie à tout groupe de Lie. Si G est le groupe de Lie, on notera par $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Plus généralement, on utilise la minuscule gothique correspondante (l'algèbre de Lie de A,B,C,... est $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$,...)
Or, $(M_m(\mathbb{K}),[\cdot,\cdot])$ est l'algèbre de Lie de $GL_m(\mathbb{K})$
(= groupe des matrices $m\times m$ inversibles à coeffs dans $\mathbb{K}$)

DÉF 1 : Une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-e.v. $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire

$$[\cdot,\cdot]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g},\quad (x,y)\mapsto[x,y]$$

appelée crochet de Lie telle que :

(i) $[\cdot,\cdot]$ est alterné, càd $[x,x]=0$ $\forall x\in\mathfrak{g}$

(ii) identité de Jacobi : $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$ on a $$[x,[y,z]]+\underbrace{[y,[z,x]]}_{-[x,z]}+\underbrace{[z,[x,y]]}_{-[[x,y],z]}=0 \quad (I)$$

REMARQUES :

(1) (i) entraine l'antisymétrie : $\forall x,y\in\mathfrak{g}$ $[y,x]=-[x,y]$
[si (i) est satisfaite, alors $[x+y,x+y]=0$ entraîne $[x,y]=-[y,x]$.]
Si car($\mathbb{K}$)$\neq 2$, alors l'antisymétrie équivaut à (i)
[$\forall x\in\mathfrak{g}$ on a $[x,x]=-[x,x]$, càd $2[x,x]=0_{\mathfrak{g}}$, d'où $[x,x]=0$ à condition que "$2\neq 0$" dans $\mathbb{K}$]

(2) (ii) montre que $[\cdot,\cdot]$ n'est pas associatif. On réécrit (I) comme

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]+[y,[x,z]]\quad\forall x,y,z\in\mathfrak{g}\quad (I')$$

$$\boxed{[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]] \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}}$$

Pour $x \in \mathfrak{g}$ on déf $\mathrm{ad}\, x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$
$y \mapsto (\mathrm{ad}\, x)(y) = [x,y]$
(linéaire)

(I') devient : $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\forall y,z \in \mathfrak{g}$ $\quad (\mathrm{ad}\, x)[y,z] = [(\mathrm{ad}\, x)(y), z] + [y, (\mathrm{ad}\, x)(z)]$ ← (règle de Leibniz pour les dérivations)

DEF 1 (suite) La dimension d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, notée $\dim \mathfrak{g}$ ou $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}$, est sa dimension en tant qu'e.v. sur $\mathbb{K}$.

EXEMPLES

⓪ Tout e.v. E sur $\mathbb{K}$ muni du crochet nul : $[x,y] = 0_E \quad \forall x,y \in E$ est une algèbre de Lie

① (Algèbre de Lie associée à une algèbre associative)

Soit A une algèbre associative sur $\mathbb{K}$ ← un e.v. A sur $\mathbb{K}$ muni d'un produit $* : A \times A \to A$, $(a,b) \mapsto a*b$ (ou simplement ab)
- associatif : $\forall a,b,c \in A \quad a(bc) = (ab)c$
- distributif par rapport à $+$: $\forall a,b,c \quad \begin{cases} (a+b)c = ac+bc \\ a(b+c) = ab+ac \end{cases}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall a,b \in A \quad \lambda(ab) = a(\lambda b) = (\lambda a)b$

Alors $[\cdot,\cdot] : A \times A \to A$ défini par
$[a,b] = a*b - b*a$ est un crochet de Lie
(vérifier !)

EX. $A = M_n(\mathbb{K})$ avec $*$ = produit de matrices
$A = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E) = \{\text{applications } \mathbb{K}\text{-linéaires } E \to E\}$ avec $*$ = composition d'applications linéaires "$\circ$"
⤳ $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(E)$ notation usuelle

② (Algèbres de Lie de dérivations)

Soit A une algèbre associative sur $\mathbb{K}$. Une dérivation de A est une application $D : A \to A$ qui satisfait :

(1) D est $\mathbb{K}$-linéaire (donc endo de l'e.v. A sur $\mathbb{K}$)

(2) (règle de Leibniz) $\forall a,b \in A \quad D(ab) = (Da)b + a(Db)$

$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A) = \{\text{dérivations de } A\}$ est un sev de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$ [souvent : $\mathrm{Der}(A)$]
mais pas une sous-algèbre associative de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$, càd $\forall D_1, D_2 \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$
on a $D_1 \circ D_2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$ mais $D_1 \circ D_2 \notin \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$
De même : $[D_1, D_2] \underset{\text{déf}}{=} D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$
(vérifier !)
$(\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A), [\cdot,\cdot])$ est une algèbre de Lie.

⤳ idée : $A = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)\}$, $*$ = produit de fonctions : $(fg)(x,y) = f(x,y)\,g(x,y)$
$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ sont dérivations
mais $\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}$ ne l'est pas
(Leibniz satisfait par dérivation 1er ordre)
$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{Vect}\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$
$[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}] = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} = 0$ (partial dérivatives commute)

EX (géo diff) M variété diff C^∞. Un champ de vecteurs est la donnée pour tout $p \in M$ d'un vecteur $u(p)$ tangent à M en p [écrit : $u(p) \in T_pM$] de façon que $u(p)$ dépend de manière C^∞ de p } formellement : un champ de vecteurs est une section C^∞ $u : M \to TM$ du fibré tangent $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$

Un champ de vecteurs définit une dérivation de l'algèbre $C^\infty(M,\mathbb{R})$ des fonctions $f : M \to \mathbb{R}$ qui sont C^∞
$\mathfrak{X}(M)$ = champ de vecteurs sur M = $\mathrm{Der}(C^\infty(M,\mathbb{R}))$ algèbre de Lie de dim infinie

Un algèbre de Lie est un e.v. muni d'un crochet de Lie. C'est donc naturel de voir comment les notions de l'algèbre linéaire comme ser, somme direct interagissent avec le crochet de Lie.

(1a)

<u>DEF 2</u> Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. Un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est une <u>sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$</u> si la restriction du crochet $[\cdot,\cdot]$ de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ (ser) munit $\mathfrak{h}$ de la structure d'algèbre de Lie.

Ceci équivaut à que $\mathfrak{h}$ soit <u>stable</u> pour $[\cdot,\cdot]$, càd $\forall x,y\in\mathfrak{h}$ on a $[x,y]\in\mathfrak{h}$

Un ser $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est un <u>idéal</u> de $\mathfrak{g}$ si $\mathfrak{h}$ est <u>stable par crochet de Lie avec</u> $\mathfrak{g}$, càd $\forall x\in\mathfrak{h}, \forall y\in\mathfrak{g}$ on a $[x,y]\in\mathfrak{h}$

(donc: idéal $\Rightarrow$ sa de Lie)

<u>EXAMPLES</u>

① Soit E un e.v. sur $\mathbb{K}$ de dimension finie muni d'une forme bilinéaire $(\cdot,\cdot): E\times E\to\mathbb{K}$ qui est <u>symétrique</u> [càd $(y,x)=(x,y)\ \forall x,y\in E$] et <u>non-dégénérée</u> [si $(x,y)=0\ \forall y\in E$, alors $x=0$]

Pour $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ on note T^* l'adjoint de T par rapport à $(\cdot,\cdot)$, càd $T^*: E\to E$ déterminé par $(Tx,y)=(x,T^*y)$ pour tous $x,y\in E$.

Alors $*: \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)\to\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ est un anti-automorphisme involutif

[càd
- $\mathbb{K}$-linéaire: $(\lambda S+T)^*=\lambda S^*+T^*\ \forall\lambda\in\mathbb{K}, S,T\in\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$
- involutif: $S^{**}=S$, en particulier $*$ inversible (d'inverse $*$)
- $(ST)^*=T^*S^*\ \ \forall S,T\in\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$

On note $\mathfrak{o}_{\mathbb{K}}(E)=\{T\in\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E) : T^*=-T\}$

Alors $\mathfrak{o}_{\mathbb{K}}(E)$ est une sa de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(E)$, dite <u>l'algèbre de Lie orthogonale</u> de $E,(\cdot,\cdot)$
- ser de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$
- $\forall S,T\in\mathfrak{o}_{\mathbb{K}}(E)$ on a $[S,T]\in\mathfrak{o}_{\mathbb{K}}(E)$ car $[S,T]^*=(ST-TS)^*=T^*S^*-S^*T^*=TS-ST=-[S,T]$

<u>REM</u> Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\dim E=n$ et on fixe une base $\mathcal{B}$ de E orthogonale par rapport à $(\cdot,\cdot)$, alors la matrice $M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T)$ de $T\in\mathfrak{o}_{\mathbb{K}}(E)$ est une matrice anti-symétrique $n\times n$: $T^t=-T$

[Question: $\dim\mathfrak{o}_{\mathbb{K}}(E)$?]

② E e.v. de dimension finie sur $\mathbb{K}$. On note $\mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(E)=\{T\in\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E) : tr(T)=0\}$

$tr(T)=tr(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T))$ où $\mathcal{B}$ est n'importe quelle base de E

$tr: E\to E$ est linéaire et satisfait $tr(AB)=tr(BA)$

<u>algèbre de Lie spéciale linéaire</u>

$\mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(E)$ est un idéal de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(E)$.
- ser car $\mathrm{Ker}(tr)$
- $\forall \underbrace{A\in\mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(E)}_{\text{même } \forall A\in\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(E)}, \forall B\in\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(E)$ on a $tr([A,B])=tr(AB-BA)=0$

③ <u>Le centre $\mathfrak{z}$</u> d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est déf par $\mathfrak{z}=\{x\in\mathfrak{g} : [x,y]=0\ \forall y\in\mathfrak{g}\}$

$\mathfrak{z}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$: