- ser de $\mathfrak{g}$ par la bilinéarité de $[\cdot,\cdot]$
- idéal d'après l'identité de Jacobi : $\forall x \in \mathfrak{z}, \forall y \in \mathfrak{g}$ on a $[x,y] \in \mathfrak{z}$ car $\forall z \in \mathfrak{g}$
$$[z,[x,y]] = [\underbrace{[z,x]}_{=0},y] + [x,\underbrace{[z,y]}_{=0}] = 0$$

On dit qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est abélienne si $[x,y]=0$ $\forall x,y \in \mathfrak{g}$
Ainsi : $\mathfrak{g}$ est abélienne $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}$ où $\mathfrak{z}$ = centre de $\mathfrak{g}$

1/10/20

DEF 3 (algèbre de Lie quotient) Soit $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ un idéal. Alors l'e.v. quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \{x+\mathfrak{a} : x \in \mathfrak{a}\}$ peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie par :
$$[x+\mathfrak{a}, y+\mathfrak{a}]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}} = [x,y]+\mathfrak{a} \qquad \forall x,y \in \mathfrak{g} \qquad \text{(vérifier)}$$

DEF 4 Soient $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ et $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}})$ deux algèbres de Lie sur le même corps $\mathbb{K}$. Un morphisme d'algèbres de Lie est une application $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ telle que
(1) φ est $\mathbb{K}$-linéaire
(2) φ préserve les crochets : $\forall x,y \in \mathfrak{g}$ $\varphi([x,y]_{\mathfrak{g}}) = [\varphi(x),\varphi(y)]_{\mathfrak{h}}$

Si φ est un isomorphisme d'e.v., on dit que φ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.
Si, en plus, $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}$ on utilise souvent le nom automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

REM Souvent on utilise la même notation $[\cdot,\cdot]$ pour le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{h}$ (même si différents); dans ce cas on écrit $\varphi([x,y]) = [\varphi(x),\varphi(y)]$ et l'écriture indique lesquels sont les crochets de $\mathfrak{g}$ et lesquels de $\mathfrak{h}$.

REMARQUE Classifier les algèbres de Lie sur $\mathbb{K}$ signifie identifier à isomorphisme près les algèbres de Lie sur $\mathbb{K}$. Impossible sans spécifier des propriétés
- classification des algèbres de Lie sur $\mathbb{C}$ simples (Killing, complétée par Cartan, 1894)
- nilpotentes ?

on donnera les défs et les détails plus avant dans le cours

$\boxed{\text{EXERCICE}}$ Classifier les algèbres de Lie sur $\mathbb{C}$ de dimension 1 ou 2.

REM Si $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie, alors
- $\mathrm{Im}\,\varphi = \{y \in \mathfrak{h} : \exists x \in \mathfrak{g} : \varphi(x)=y\}$ est une sa de Lie de $\mathfrak{h}$
[$y,y' \in \mathrm{Im}\,\varphi \Rightarrow \exists x,x' \in \mathfrak{g}$ tq $y=\varphi(x), y'=\varphi(x')$, d'où $[y,y'] = [\varphi(x),\varphi(x')] = \varphi([x,x']) \in \mathrm{Im}\,\varphi$]
- $\ker\varphi$ est un idéal de $\mathfrak{g}$

On peut donc définir l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}/\ker\varphi$ et $\tilde{\varphi} : \mathfrak{g}/\ker\varphi \to \mathrm{Im}\,\varphi$ est un iso d'algèbres de Lie.

EXEMPLES

① Soit E un e.v. sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}$ considéré comme algèbre de Lie abélienne.
Alors $\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(E) \to \mathbb{K}$ est un morphisme d'algèbres de Lie.
En fait : linéaire et $\mathrm{tr}([x,y]) = 0 \leftarrow [\mathrm{tr}\,x, \mathrm{tr}\,y]$ dans $\mathbb{K}$

② Pour rappel : si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et $x \in \mathfrak{g}$, alors $\mathrm{ad}\,x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $y \mapsto \mathrm{ad}\,x(y) = [x,y]$
est linéaire, d'où $\mathrm{ad}\,x \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$

$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$, $x \mapsto \mathrm{ad}\,x$ est un morphisme d'algèbres de Lie
- $\mathbb{K}$ linéaire, car $x \mapsto [x,\cdot]$ est linéaire
- préserve les crochets par l'identité de Jacobi

ad s'appelle la <u>représentation adjointe</u> de $\mathfrak{g}$

<u>EX</u> $\mathfrak{g} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{x,y\}$ où x,y l.i., $[x,y] = x$ et tous les autres crochets de Lie 0
$[y,x] = -x$

Par rapport à la base $\mathcal{B} = \{x,y\}$ de $\mathfrak{g}$ on a les matrices suivantes

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{ad}\,x) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} x & y \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \end{array}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{ad}\,y) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} x & y \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \end{array}$$

$\mathrm{ad}[x,y](z) = [[x,y],z] = -[z,[x,y]]$
$= [x,[y,z]] + [y,[z,x]]$ (d'après Jacobi)
$= \mathrm{ad}\,x(\mathrm{ad}\,y(z)) - \mathrm{ad}\,y(\mathrm{ad}\,x(z)) = [\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,y](z)$

$\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}) = \{x \in \mathfrak{g} ; \mathrm{ad}\,x = 0\} = \{x \in \mathfrak{g} ; [x,y] = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g}\} = \mathfrak{z}$ (centre de $\mathfrak{g}$)

<u>DEF5</u> Un morphisme d'algèbres de Lie $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(E)$ où E est un e.v. sur $\mathbb{K}$ s'appelle une <u>représentation linéaire</u> de $\mathfrak{g}$ sur E.

<u>DEF6</u> (produits cartésiens, sommes directes) Soient $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ et $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}})$ deux algèbres de Lie sur le même corps $\mathbb{K}$. L'e.v. sur $\mathbb{K}$

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{h} = \{(x,y) ; x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h}\}$$

peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie par rapport au crochet de Lie

$$[(x,y),(x',y')] = ([x,x']_{\mathfrak{g}}, [y,y']_{\mathfrak{h}}) \quad \forall x,x' \in \mathfrak{g}, \forall y,y' \in \mathfrak{h}$$

$\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{g} \times \{0\}$ et $\mathfrak{h} \equiv \{0\} \times \mathfrak{h}$ sont deux idéaux de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ tels que $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = \{(0,0)\}$
Réciproquement, si $\mathfrak{l}$ est une algèbre de Lie et $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ deux idéaux de $\mathfrak{l}$ tels que $\mathfrak{l} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ (en tant qu'e.v.) alors l'application $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{l}$, $(x,y) \mapsto x+y$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie à partir duquel on peut identifier $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{l}$.
On notera cette algèbre de Lie par $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$.
Ces défs s'étendent au cas d'un nombre fini d'algèbres de Lie.

§2 COMPLEXIFICATIONS ET EXTENSIONS DE SCALAIRES

Tout e.v. E sur $\mathbb{C}$ est un e.v. sur $\mathbb{R}$, qu'on notera $E^{\mathbb{R}}$. Si $\mathcal{B}_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E, alors $\{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$ est une base de $E^{\mathbb{R}}$, d'où $\dim_{\mathbb{R}}(E^{\mathbb{R}}) = 2\dim E$. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$, alors $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ muni du crochet de $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$.

En général, si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif et $\tilde{\mathbb{K}} \supset \mathbb{K}$ une <u>extension</u> de $\mathbb{K}$ (càd un corps commutatif dont $\mathbb{K}$ est un sous-corps : e.g. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{C}$), alors à toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\tilde{\mathbb{K}}$ correspond une algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathbb{K}}$ sur $\mathbb{K}$: on parle de <u>restriction de scalaires</u>.
La construction qui va dans la direction opposée (càd associe à une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\tilde{\mathbb{K}}}$ sur $\tilde{\mathbb{K}}$ s'appelle une <u>extension de scalaires</u>. On la regardera pour $(\mathbb{K}, \tilde{\mathbb{K}}) = (\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

<u>INTERLUDE : PRODUITS TENSORIELS D'E.V.</u>

Si E et F sont deux e.v. sur $\mathbb{K}$, le produit tensoriel $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ est un e.v. sur $\mathbb{K}$ ensemble à une application $\mathbb{K}$-bilinéaire $\iota : E \times F \to E \otimes_{\mathbb{K}} F$ caractérisé par la propriété suivante :

$(u,v) \mapsto \iota(u,v) = u \otimes v$ ⟵ [un "symbole" qui dépend de façon $\mathbb{K}$-bilinéaire de u et v]

à tout e.v. V sur $\mathbb{K}$ et toute application $\mathbb{K}$-bilinéaire $\varphi : E \times F \to V$ est associé de façon unique une application $\mathbb{K}$-linéaire $\Phi : E \otimes_{\mathbb{K}} F \to V$ telle que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota"'] & V \\ E \otimes_{\mathbb{K}} F \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

On peut montrer que $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ existe et est unique à isomorphisme près (voir e.g. [Knapp, Basic algebra, thm 10.18]).
La preuve de l'existence est donne une construction explicite de $E \otimes_{\mathbb{K}} F$. En fait, $E \otimes_{\mathbb{K}} F = \mathrm{Vect}\{u \otimes v : u \in E, v \in F\}$.
La condition que $u \otimes v$ soit un symbole qui dépend de $(u,v) \in E \times F$ de façon bilinéaire signifie qu'il doit satisfaire les règles suivantes :

$$\begin{cases} (u+u') \otimes v = u \otimes v + u' \otimes v \\ u \otimes (v + v') = u \otimes v + u \otimes v' \\ (\lambda u) \otimes v = \lambda (u \otimes v) = u \otimes (\lambda v) \end{cases} \quad \forall u, u' \in E, \forall v, v' \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

En outre, si $\dim E < \infty$, $\dim F < \infty$, $\mathcal{B}_E = \{e_j\}$ est une base de E et $\mathcal{B}_F = \{f_k\}$ est une base de F, alors une base de $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ est $\{e_j \otimes f_k ; e_j \in \mathcal{B}_E, f_k \in \mathcal{B}_F\}$, d'où $\dim(E \otimes_{\mathbb{K}} F) = (\dim E)(\dim F)$

<u>REMARQUE</u> Si $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont deux algèbres de Lie sur $\mathbb{K}$, alors le produit tensoriel $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{h}$ est bien déf en tant qu'e.v. sur $\mathbb{K}$, mais, en général, il n'a pas une structure naturelle d'algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$
($\rightsquigarrow$ pas toutes les opérations naturelles entre e.v. s'étendent aux algèbres de Lie).

- Soit E un e.v. sur $\mathbb{R}$. L'e.v. <u>complexifié de E</u>, noté $E_{\mathbb{C}}$, est $E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}$ est considéré comme e.v. sur $\mathbb{R}$. L'application $E \to E_{\mathbb{C}} = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $v \mapsto v \otimes 1$ identifie de façon canonique E avec une partie de $E_{\mathbb{C}}$.
  On muni $E_{\mathbb{C}}$ d'une structure d'e.v. sur $\mathbb{C}$ par la multiplication scalaire déf $\forall v \in E, \forall \lambda, z \in \mathbb{C}$ par
  $\lambda \cdot (v \otimes z) = v \otimes (\lambda z)$ [avec extension $\mathbb{R}$-linéaire à $E_{\mathbb{C}}$]

Si $\{e_1,\dots,e_n\}$ est une base de E, alors $\{e_1\otimes 1,\dots,e_n\otimes 1\}$ est une base du $\mathbb{C}$-e.v. $E_{\mathbb{C}}$.
Si $v\in E$, $z=x+iy\in\mathbb{C}$, alors $v\otimes z = v\otimes(x+iy) = v\otimes x+v\otimes(iy) = x(v\otimes 1)+i(yv)\otimes 1$. Ainsi l'identification $u\equiv u\otimes 1$ donne $v\otimes z\equiv xv+i(yv)$, d'où $(E_{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} = E\oplus iE$

<u>REMARQUE</u> L'extension et la restriction de scalaires ne sont pas opérations mutuellement réciproques :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\text{complex}"'] \arrow[rr, bend left, "\neq id"] & E_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\text{reste.}"'] & (E_{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} \end{tikzcd} \qquad \text{car } \dim_{\mathbb{R}}(E_{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} = 2\dim_{\mathbb{R}} E$$

<u>DEF 7</u> L'<u>algèbre de Lie complexifiée</u> d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{R}$ est le $\mathbb{C}$ e.v. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$

muni du crochet de Lie obtenu par $\mathbb{C}$-bilinéarité de

$$[x\otimes z, y\otimes w] = [x,y]\otimes zw \quad \text{pour } x,y\in\mathfrak{g},\ z,w\in\mathbb{C}$$

<u>REM</u> On peut vérifier que $[\cdot,\cdot]$ est bien un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. En écrivant les éléments de $E_{\mathbb{C}}$ comme $x+iy$ avec $x,y\in E$, on a explicitement

$$[x+iy, x'+iy'] = ([x,x']-[y,y'])+i([x,y']+[x',y]) \quad \forall x,y,x',y'\in\mathfrak{g}$$

dans $M_n(\mathbb{R})$

<u>EX.</u> • $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ car tout élément de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ est une matrice $n\times n$ à coeff dans $\mathbb{R}$, tout élément de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ est de la forme $A+iB$, $A,B\in\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, càd un élément de $M_n(\mathbb{C})$, et

$$\begin{aligned}
[A+iB, A'+iB'] &= ([A,A']-\underbrace{[B,B']}_{\text{crochet in } \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})})+i([A,B']+[B,A']) \\
&= (\cancel{AA'}-\cancel{A'A}-\cancel{BB'}+B'B)+i(\cancel{AB'}-\cancel{B'A}+\cancel{BA'}-A'B) \\
&= A(A'+iB')-(A'+iB')A+i[B(A'+iB')-(A'+iB')B] \\
&= (A+iB)(A'+iB')-(A'+iB')(A+iB) \\
&= [A+iB, A'+iB']_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})}
\end{aligned}$$