<u>DEF 14</u> Une représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est <u>indécomposable</u> si elle n'est pas isomorphe à la somme directe de deux sous-représentations propres (= autre qu'elle même et $\{0\}$)

<u>REMARQUE</u> Irréductible $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ indécomposable

EX. $\mathfrak{g}=\mathbb{C}$, $V=\mathbb{C}^2$, $\pi: \mathbb{C} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2) \cong \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ défini par $\pi(1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$. $\pi(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

π est $\mathbb{C}$-linéaire, d'où univoquement déterminé par son valeur en $1 \in \mathbb{C}$. [Nécessairement morphisme d'algèbres de Lie car $\mathbb{C}$ et $\pi(\mathbb{C})$ sont de dimension 1, donc abéliennes]

agissant sur $\mathbb{C}^2$ (vecteurs colonne) par multiplication matricielle $\pi(1)\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$

$W \subset \mathbb{C}^2$ est π-invariant si $\pi(1)W \subset W$.

$W = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est π-invariant (et $\neq \{0\}, W$), d'où π n'est pas irréductible.

Un sev de $\mathbb{C}^2$ autre que $\{0\}, \mathbb{C}^2$ est de dim 1, donc un se propre de $\pi(1)$.

Or, $\pi(1)$ possède valeur propre 0 (de mult. algébrique 2) avec 1-dim sous-espace propre $W = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc π est indécomposable mais pas irréductible.

<u>DEF 15</u> On dit qu'une représentation est <u>complètement irréductible</u> (ou <u>semi-simple</u>) si elle est une somme directe de sous-représentations irréductibles.

EX $\mathfrak{g}=\mathbb{C}$, $V=\mathbb{C}^2$, $\pi: \mathbb{C} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2) = \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ déf par $\pi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Les deux se propres de $\pi(1)$, notamment

$W_1 = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $W_2 = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sont π-invariants et $V = \mathbb{C}^2 = W_1 \oplus W_2$. Donc $(\pi, \mathbb{C}^2)$ est complètement réductible

$\boxed{\text{EXERCICE}}$ Montrer: (π, V) est complètement irréductible si et seulement si tout sev W de V qui est π-invariant possède un complémentaire π-invariant (càd $\exists$ un sev W' de V tel que W' est π-invariant et $V = W \oplus W'$)

<u>§4 ALGEBRES DE LIE SIMPLES, SEMISIMPLES, RÉSOLUBLES, et NILPOTENTES</u>

NOTATION : Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ deux sa de Lie de $\mathfrak{g}$, on note

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \mathrm{Vect}\{[x,y] : x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}\} \text{ (sev de } \mathfrak{g} \text{ en général)}$$

REM (1) $\mathfrak{a} \subset \tilde{\mathfrak{a}}, \mathfrak{b} \subset \tilde{\mathfrak{b}}$ sa de Lie de $\mathfrak{g}$ $\Rightarrow$ $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subset [\tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{b}}]$

(2) Dans cette notation, un sev $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ si et seulement si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$

(3) Si $\mathfrak{h}, \tilde{\mathfrak{h}}$ sont deux idéaux de $\mathfrak{g}$, alors $[\mathfrak{h}, \tilde{\mathfrak{h}}]$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ (identité de Jacobi)

<u>DEF 16</u> $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ s'appelle la <u>sous-algèbre dérivée</u> de $\mathfrak{g}$ (en fait, un idéal de $\mathfrak{g}$).

Dans cette section, on étudie les propriétés d'une algèbre de Lie à partir de ses idéaux.

Déjà vu: $\mathfrak{g}$ abélienne lorsque $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$. A l'autre extrémité on a les algèbres de Lie satisfaisantes $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ (on appelle ces algèbres de Lie <u>parfaites</u>). On étudiera une classe importante d'algèbres de Lie parfaites : les algèbres de Lie semisimples. Parmi celles-ci on trouve les algèbres de Lie simples, qu'on va définir.

DEF 17 Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite simple si

(1) $\mathfrak{g}$ n'est pas abélienne (càd $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\neq\{0\}$)

(2) $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéaux différents de $\{0\}$ et $\mathfrak{g}$.

REM : (1)+(2) $\Rightarrow$ $\mathfrak{z}$ (= centre de $\mathfrak{g}$) $=0$ et $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$.

REMARQUE : Théorème de Ado pour les algèbres de Lie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ayant centre trivial.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie (sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telle que $\underbrace{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}_{\text{centre de } \mathfrak{g}}=0$ (par ex. si $\mathfrak{g}$ est simple), alors $\mathfrak{g}$ est isomorphe à une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ où $\dim V<\infty$.

Preuve $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ est injective car $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad})=\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=\{0\}$. Donc $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie isomorphe à $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$, qui est une sa de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$. L'énoncé est donc vrai avec $V=\mathfrak{g}$.

EXEMPLE $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) = \{A\in M_2(\mathbb{K}) : \mathrm{trace}(A)=0\} = \{A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & -a\end{pmatrix} ; a,b,c\in\mathbb{K}\}$, $[A,B]=AB-BA$
($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

On pose : $x=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. Alors $\{x,y,h\}$ est une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

Crochet de Lie identifié par les commutateurs :

$[x,y]=h$, $[h,x]=2x$, $[h,y]=-2y$ (donc x,y,h sont vecteurs propres de $\mathrm{ad}\,h$, de valeurs propres $2,-2,0$ respectivement)

On montre que $\mathfrak{g}$ est simple. Pour ce faire : soit $\{0\}\neq\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ un idéal. Soit $ax+by+ch\in\mathfrak{h}$

Puisque $\mathfrak{h}$ est un idéal,

$$\mathfrak{h}\ni(\mathrm{ad}\,x)^2(ax+by+ch)=[x,[x,ax+by+ch]]=[x,bh+2cx]=-2bx$$
$$\mathfrak{h}\ni(\mathrm{ad}\,y)^2(ax+by+ch)=[y,[y,ax+by+ch]]=[y,-ah+2cy]=2ay$$

Si $a\neq0$, alors $y\in\mathfrak{h}$, d'où $h=\underbrace{[x,y]}\in\mathfrak{h}$ et donc $x=\underbrace{[\tfrac{1}{2}h,x]}\in\mathfrak{h}$. Donc $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$.

De même, si $b\neq0$, alors $x\in\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$.

Si $a=b=0$, alors $h\in\mathfrak{h}$ et donc les crochets avec h donnent $x,y\in\mathfrak{h}$, càd $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$.

Ainsi $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ est simple. $\square$

On introduit d'autres classes d'algèbres de Lie en itérant les commutateurs.

DEF 18 La série dérivée de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est la suite descendante d'idéaux de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}^{(0)}=\mathfrak{g}\supset\mathfrak{g}^{(1)}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\supset\mathfrak{g}^{(2)}=[\mathfrak{g}^{(1)},\mathfrak{g}^{(1)}]\supset\dots\supset\mathfrak{g}^{(m)}=[\mathfrak{g}^{(m-1)},\mathfrak{g}^{(m-1)}]\supset\dots$$

On dit que $\mathfrak{g}$ est résoluble s'il existe m tel que $\mathfrak{g}^{(m)}=\{0\}$.

Le plus petit tel m est l'ordre de résolubilité de $\mathfrak{g}$

EXEMPLES (1) $\mathfrak{g}$ abélienne $\neq\{0\}\Leftrightarrow$ résoluble d'ordre de résolubilité 1

$\mathfrak{g}$ simple $\Rightarrow$ décisément pas résoluble ($\mathfrak{g}^{(m)}=\mathfrak{g}$ pour tout m)

(2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}_m(\mathbb{K})$ = { matrices $m\times m$ triangulaires supérieures à coefficients dans $\mathbb{K}$ }

$$= \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & x_{mm} \end{pmatrix} ;\ x_{ij} \in \mathbb{K} \right\} = \{ x = (x_{ij}) :\ x_{ij} = 0\ \forall i > j \}$$

$\delta_m(\mathbb{K})$ = { matrices diagonales $m\times m$ à coeffs dans $\mathbb{K}$ }

$\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})$ = { matrices $m \times m$ triangulaires supérieures stricts à coeffs dans $\mathbb{K}$ }

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ x = (x_{ij}) :\ x_{ij} = 0\ \forall i \geq j \}$$

En tant qu'e.v. sur $\mathbb{K}$: $\mathfrak{t}_m(\mathbb{K}) = \delta_m(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$

$\dim \mathfrak{n}_m(\mathbb{K}) = \frac{m^2 - m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$; $\dim \delta_m(\mathbb{K}) = m$; $\dim \mathfrak{t}_m(\mathbb{K}) = \dim \mathfrak{n}_m(\mathbb{K}) + m = \frac{m(m+1)}{2}$

$[\delta_m(\mathbb{K}), \delta_m(\mathbb{K})] = 0$, càd $\delta_m(\mathbb{K})$ sa de Lie abélienne de $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{K})$

$\forall x, y \in \boxed{\mathfrak{t}_m(\mathbb{K})}$ / $\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})$: $[x,y]_{ij} = (xy - yx)_{ij} = \sum x_{ik} y_{kj} - \sum y_{ik} x_{kj}$

$$= \sum_{i \leq k \leq j} x_{ik} y_{kj} - \sum_{i \leq k \leq j} y_{ik} x_{kj}$$

"<" si $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$

d'où $[\mathfrak{t}_m(\mathbb{K}), \mathfrak{t}_m(\mathbb{K})] \subset \mathfrak{t}_m(\mathbb{K})$
$[\mathfrak{n}_m(\mathbb{K}), \mathfrak{n}_m(\mathbb{K})] \subset \mathfrak{n}_m(\mathbb{K})$ (donc sa de Lie de $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{K})$)

$\{e_{ij}\}$ base canonique de $M_m(\mathbb{K})$

Si e_{ij} = matrice ayant tous les coeffs 0 sauf celui d'indice i,j égal à 1

alors $e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il}$ avec $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

d'où $[e_{ij}, e_{kl}] = e_{ij} e_{kl} - e_{kl} e_{ij} = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{li} e_{kj}$

En particulier : pour $i \neq j$, $[e_{ii}, e_{ij}] = e_{ij}$, d'où $[\delta_m(\mathbb{K}), \mathfrak{n}_n(\mathbb{K})] = \mathfrak{n}_m(\mathbb{K})$

càd toute matrice de $\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})$ est comb. linéaire de crochets $[x,y]$ avec $x \in \delta_m(\mathbb{K}), y \in \mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$

Donc : $\mathfrak{n}_m(\mathbb{K}) = [\delta_m(\mathbb{K}), \mathfrak{n}_m(\mathbb{K})] \subset [\mathfrak{t}_m(\mathbb{K}), \mathfrak{t}_m(\mathbb{K})] = [\mathfrak{n}_m(\mathbb{K}) \oplus \delta_m(\mathbb{K}), \mathfrak{n}_m(\mathbb{K}) \oplus \delta_m(\mathbb{K})]$

$$\subset \mathfrak{n}_m(\mathbb{K}) + \underbrace{[\delta_m(\mathbb{K}), \mathfrak{n}_m(\mathbb{K})]}_{\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})} = \mathfrak{n}_m(\mathbb{K})$$

d'où $[\mathfrak{t}_m(\mathbb{K}), \mathfrak{t}_m(\mathbb{K})] = \mathfrak{n}_m(\mathbb{K})$.

Ceci donne $\mathfrak{t}_m(\mathbb{K})^{(1)}$.

$$\mathfrak{t}_m(\mathbb{K})^{(2)} = [\mathfrak{t}_m(\mathbb{K})^{(1)}, \mathfrak{t}_m(\mathbb{K})^{(1)}] = [\mathfrak{n}_m(\mathbb{K}), \mathfrak{n}_m(\mathbb{K})] = \mathrm{Vect}\{e_{ij} :\ j - i \geq 2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ & \ddots & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$m=3$: $\mathfrak{t}_3(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & & * \\ & x_{22} & \\ 0 & & x_{33} \end{pmatrix} \right\} \supset \mathfrak{t}_3^{(1)}(\mathbb{K}) = \mathfrak{n}_3(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \supset \mathfrak{t}_3^{(2)}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \supset \mathfrak{t}_4^{(3)} = \{0\}$

$m=4$: $\mathfrak{t}_4(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & & * \\ & \ddots & \\ * & & x_{44} \end{pmatrix} \right\} \supset \mathfrak{t}_4^{(1)}(\mathbb{K}) = \mathfrak{n}_4(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\} \supset \mathfrak{t}_4^{(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ & 0 & 0 & c \\ & & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \right\} \supset \mathfrak{t}_4^{(3)} = \{0\}$

On peut montrer que $t_m(\mathbb{K})^{(k)} = \mathrm{Vect}\{e_{ij} : j>i \text{ et } j-i \geq 2^{k-1}\}$

Idée : $\subset$ calcul du $[\cdot,\cdot]$

$\supset$ Si $i<l<j$, alors $[e_{il}, e_{lj}] = e_{ij}$, d'où tout e_{ij} avec $j-i \geq 2$ s'écrit comme commutateur de deux éléments avec $(l-i)+(j-l) = j-i$

[si $l-i \geq 2^{k-2}$ et $j-l \geq 2^{k-2}$, alors $j-i \geq 2 \cdot 2^{k-2} = 2^{k-1}$]

Conclusion : si $2^{k-1} \geq m$, alors $t_m(\mathbb{K})^{(k)} = \{0\}$, d'où $t_m(\mathbb{K})$ résoluble

LEMME 2 Soit $0 \to \mathfrak{h} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{g} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{k} \to 0$ une suite exacte courte de morphismes d'algèbres de Lie (càd, φ injective, ψ surjective, $\mathrm{Im}\varphi = \ker\psi$)

Alors : $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ sont résolubles

Preuve Si $f : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ est un morphisme d'algèbres de Lie, alors $f(\mathfrak{a}^{(m)}) = f(\mathfrak{a})^{(m)}$.

$\Rightarrow$: Supposons que $\mathfrak{g}$ est résoluble et $\mathfrak{g}^{(m)} = \{0\}$. Alors $\mathfrak{h}^{(m)} \simeq \varphi(\mathfrak{h}^{(m)})$ [car $\varphi : \mathfrak{h} \to \varphi(\mathfrak{h})$ iso] $\subset \mathfrak{g}^{(m)} = \{0\}$, d'où $\mathfrak{h}$ est résoluble.

et $\mathfrak{k}^{(m)} = \psi(\mathfrak{g})^{(m)}$ [car ψ surjective]

$= \psi(\mathfrak{g}^{(m)}) = \psi(\{0\}) = \{0\}$, d'où $\mathfrak{k}$ est résoluble.

$\Leftarrow$: Si $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ sont résolubles, avec $\mathfrak{h}^{(m)} = \{0\}$ et $\mathfrak{k}^{(m)} = 0$, alors $\psi(\mathfrak{g}^{(m)}) = \psi(\mathfrak{g})^{(m)} = \mathfrak{k}^{(m)} = \{0\}$, d'où $\mathfrak{g}^{(m)} \subset \ker\psi = \mathrm{Im}\varphi = \varphi(\mathfrak{h})$. Ainsi $\mathfrak{g}^{(m+m)} = (\mathfrak{g}^{(m)})^{(m)} \subset \varphi(\mathfrak{h})^{(m)} = \varphi(\mathfrak{h}^{(m)}) = \varphi(\{0\}) = \{0\}$ □

COROLLAIRE 1

(1) Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, alors toutes les sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et les images homomorphe de $\mathfrak{g}$ sont résolubles.

(2) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un idéal. Alors : $\mathfrak{g}$ est résoluble $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sont résolubles

(3) Si $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ sont deux idéaux résolubles de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{h}+\mathfrak{k}$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$

Preuve

(3) Le théorème d'iso des e.v. s'étend aux algèbres de Lie : $(\mathfrak{h}+\mathfrak{k})/\mathfrak{k} \simeq \underbrace{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}}_{\text{résoluble car } \mathfrak{h} \text{ l'est}}$

Or, $\mathfrak{k}$ est résoluble et $(\mathfrak{h}+\mathfrak{k})/\mathfrak{k}$ résoluble donne $\mathfrak{h}+\mathfrak{k}$ résoluble. □

COROLLAIRE/DEF 2 Toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possède un unique idéal résoluble maximal (par rapport à l'inclusion). Il s'appelle le radical de $\mathfrak{g}$, noté $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$.

Preuve $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$ est la somme de tous les idéaux max de $\mathfrak{g}$.

DEF 18 On dit qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semisimple si $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g} = 0$

EX. $\mathfrak{g}$ simple $\Rightarrow$ semisimple car $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}$ car $\mathfrak{g}$ n'est pas résoluble

EXERCICE Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie arbitraire, alors $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$ est semisimple