22/10

DEF 19 La <u>suite centrale</u> de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est la suite descendante d'idéaux de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}^0=\mathfrak{g}\supset\mathfrak{g}^1=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\supset\mathfrak{g}^2=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^1]\supset\dots\supset\mathfrak{g}^m=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{m-1}]\supset\dots$$

Par la suite, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

On dit que $\mathfrak{g}$ est <u>nilpotente</u> s'il existe m tel que $\mathfrak{g}^m=\{0\}$.

Le plus petit tel m est <u>l'ordre de nilpotence</u> de $\mathfrak{g}$

REM $\mathfrak{g}^0=\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^{(0)}\supset\mathfrak{g}^1=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}^{(1)}\supset\mathfrak{g}^2=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^1]\supset[\mathfrak{g}^{(1)},\mathfrak{g}^{(1)}]=\mathfrak{g}^{(2)}$.

Par récurrence : supposons que $\mathfrak{g}^m\supset\mathfrak{g}^{(m)}$. Alors $\mathfrak{g}^{m+1}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^m]\supset[\mathfrak{g}^{(m)},\mathfrak{g}^{(m)}]=\mathfrak{g}^{(m+1)}$.

Par conséquent : $\mathfrak{g}$ nilpotent $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ résoluble.
$\not\Leftarrow$

EXEMPLES

(1) $\mathfrak{g}$ abélienne $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}^1=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=0$, d'où $\mathfrak{g}$ nilpotente.

(2) $\mathfrak{g}=\mathfrak{t}_m(\mathbb{K})$ est résoluble (voir p. 14-15), mais pas nilpotente. En fait (voir p.14)

$\mathfrak{t}_m^1(\mathbb{K})=\mathfrak{t}_m^{(1)}(\mathbb{K})=[\mathfrak{t}_m(\mathbb{K}),\mathfrak{t}_m(\mathbb{K})]=\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})$

$\mathfrak{t}_m^2(\mathbb{K})=[\mathfrak{t}_m(\mathbb{K}),\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})]=\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})$

d'où $\mathfrak{t}_m^k(\mathbb{K})=\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})\neq\{0\}$ pour tout $k\geqslant 1$

(3) $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})$ est nilpotente. En fait (voir p.14)

$\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})^1=[\mathfrak{n}_m(\mathbb{K}),\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})]=\mathrm{Vect}\{e_{ij} ; j-i\geqslant 2\}=\left\{\begin{pmatrix}0&0&*\\&\ddots&0\\&&0\end{pmatrix}\right\}$

$\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})^2=[\mathfrak{n}_m(\mathbb{K}),\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})^1]=\mathrm{Vect}\{e_{ij} ; j-i\geqslant 3\}$

$\dots$

$\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})^k=[\mathfrak{n}_m(\mathbb{K}),\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})^{k-1}]=\mathrm{Vect}\{e_{ij} ; j-i\geqslant k+1\}$

Si $k+1\geqslant m$, alors $\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})^k=\{0\}$

LEMME 2 Soit $0\to\mathfrak{h}\xrightarrow{\varphi}\mathfrak{g}\xrightarrow{\psi}\mathfrak{a}\to 0$ une suite exacte d'algèbres de Lie sur $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

(càd $\mathfrak{h},\mathfrak{g},\mathfrak{a}$ algèbres de Lie ; φ,ψ morphismes d'algèbres de Lie ; φ injectif ; ψ surjectif ; $\operatorname{Im}\varphi=\ker\psi$)

(1) Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, alors $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{a}$ sont nilpotentes.

(2) Si $\mathfrak{h},\mathfrak{a}$ sont nilpotentes et $\varphi(\mathfrak{h})\subset\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (= centre de $\mathfrak{g}$), alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente.

<u>Preuve</u> Si $f:\mathfrak{a}\to\mathfrak{b}$ est un morphisme d'algèbres de Lie, alors $f(\mathfrak{a}^m)=f(\mathfrak{a})^m$ pour tout m.

⌈ Par récurrence, le cas $m=1$ étant vrai. Si l'égalité est vraie pour m, alors $f(\mathfrak{a}^{m+1})=f([\mathfrak{a},\mathfrak{a}^m])$
$\underset{f\text{ morphisme}}{=}[f(\mathfrak{a}),f(\mathfrak{a}^m)]\underset{\text{récurrence}}{=}[f(\mathfrak{a}),f(\mathfrak{a})^m]=f(\mathfrak{a})^{m+1}$ ⌋

(1) Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente et $\mathfrak{g}^m=0$, alors $\mathfrak{h}^m\overset{\varphi:\mathfrak{h}\to\varphi(\mathfrak{h})\text{ isomorphisme}}{\simeq}\varphi(\mathfrak{h}^m)\subset\varphi(\mathfrak{g}^m)=\varphi(\{0\})=\{0\}$

et $\mathfrak{a}^m=\psi(\mathfrak{g})^m$ [car $\mathfrak{a}=\psi(\mathfrak{g})$]
$=\psi(\mathfrak{g}^m)$ [car ψ morphisme]
$=\psi(\{0\})=\{0\}$.

(2) Si $\mathfrak{a}$ est nilpotente et $\mathfrak{a}^m=\{0\}$ alors $\psi(\mathfrak{g}^m)\overset{\psi\text{ morph.}}{=}\psi(\mathfrak{g})^m\overset{\psi(\mathfrak{g})=\mathfrak{a}}{=}\mathfrak{a}^m=\{0\}$, d'où $\mathfrak{g}^m\subset\ker\psi=\operatorname{Im}\varphi\supset\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

et donc $\mathfrak{g}^{m+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^m] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{g})] = \{0\}$, d'où $\mathfrak{g}$ est nilpotente $\square$

COROLLAIRE 2

Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, alors toutes les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ et les images homomorphes de $\mathfrak{g}$ sont nilpotentes.

EXEMPLE $0 \to \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathfrak{g} \xrightarrow{ad} \underbrace{ad\,\mathfrak{g}}_{\text{sa de Lie de } \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})} \to 0$ est une suite exacte d'algèbres de Lie

$x \mapsto x$

[car $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}, ad\,\mathfrak{g}$ algèbres de Lie ; ι, ad morphismes d'algèbres de Lie ; ι injectif ; ad surj. ; $\ker(ad) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \iota(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$]. Puisque $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est abélienne (donc nilpotente), le lemme 2 donne : $\mathfrak{g}$ est nilpotente $\Leftrightarrow$ $ad\,\mathfrak{g}$ est nilpotente

REMARQUE : endomorphismes et matrices nilpotentes versus algèbres de Lie nilpotentes

Par la suite, V dénote toujours un e.v. de dimension finie.

- Soit V un e.v. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\varphi \in End(V)$ [= application linéaire $V \to V$]. On dit que φ est nilpotent s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi^m = 0$ (où $\varphi^m = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{m \text{ fois}}$)
- $A \in M_m(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est une matrice nilpotente s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $A^m = 0$.
- Si $\mathcal{B}$ est une base de V et $A = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$, alors $A^m = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi^m)$, d'où A nilpotente $\Leftrightarrow$ φ nilpotent

Soit $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ une sa de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V) = (End_{\mathbb{K}}(V), [\cdot,\cdot] = \text{commutateur})$

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente, cela ne signifie pas que tout élément $x \in \mathfrak{g}$ (qui est un endomorphisme de V) soit un endomorphisme nilpotent.

De même, si $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_m(\mathbb{K})$ est une sa de Lie de $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{K}) = (M_m(\mathbb{K}), [\cdot,\cdot] = \text{commutateur})$ et $\mathfrak{g}$ est nilpotente en tant qu'algèbre de Lie, cela ne signifie pas que tout $A \in \mathfrak{g}$ (qui est une matrice $m \times m$) soit une matrice nilpotente.

Ex $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}_m(\mathbb{K}) = \{\text{matrices diagonales } m \times m\}$ est une algèbre de Lie abélienne, donc nilpotente. D'autre part I = matrice identité $\in \mathfrak{d}_m(\mathbb{K})$ et clairement $\forall m \in \mathbb{N}$ $I^m = I \neq 0$ càd I n'est pas une matrice nilpotente.

Le lien approprié entre algèbres de Lie nilpotentes et endomorphismes nilpotents est le suivant.

Si $\mathfrak{g}$ est nilpotent, $\exists m$ tel que $\mathfrak{g}^m = \overbrace{[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \dots [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}^{m\text{-fois}} \cdots]] = \{0\}$

d'où $\forall x_1, x_2, \dots, x_m, y \in \mathfrak{g}$

$$ad\,x_1(ad\,x_2(\cdots ad\,x_m(y)\cdots)) = [x_1, [x_2, \dots, [x_m, y] \dots]] = 0$$

càd $\forall x_1, x_2, \dots, x_m$ $ad\,x_1 \circ ad\,x_2 \circ \dots \circ ad\,x_m = 0$

En particulier, si $x_1 = \dots = x_m = x$, on obtient $\forall x \in \mathfrak{g}$ $(ad\,x)^m = 0$. Ceci montre

LEMME 3 Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente, alors $\forall x \in \mathfrak{g}$, $ad\,x \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ est un endomorphisme nilpotent.

En fait, la réciproque est aussi vrai.

THÉORÈME 1 (Engel) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors : $\mathfrak{g}$ est nilpotente si et seulement si $\forall x \in \mathfrak{g}$ l'endomorphisme $\operatorname{ad} x$ est nilpotent.

Pour démontrer le théorème d'Engel on a besoin de plusieurs résultats

LEMME 4 (1) Si $x \in \underbrace{\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)}_{\mathfrak{g}}$ est un endomorphisme nilpotent, alors $\operatorname{ad} x \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\underbrace{\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)}_{\mathfrak{g}})$ est aussi un endo nilpotent.

(2) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{h}$ une sa de Lie de $\mathfrak{g}$. Alors $\widetilde{\operatorname{ad}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\overbrace{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}^{\text{e.v. quotient (pas d'algèbre de Lie si } \mathfrak{h} \text{ pas idéal)}})$ déf par
$$(\widetilde{\operatorname{ad}} x)(y+\mathfrak{h}) = \operatorname{ad} x(y) + \mathfrak{h} = [x,y]+\mathfrak{h} \quad \text{pour tout } x\in\mathfrak{h}, y \in \mathfrak{g}$$
est une représentation de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$

Preuve (1) $\forall y \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ on a $\operatorname{ad} x(y) = x\circ y - y \circ x = (\ell_x - r_x)(y)$ où $\ell_x : \begin{array}{l}\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V) \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V) \\ y \to x\circ y\end{array}$; $r_x : \begin{array}{l}\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V) \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V) \\ y \mapsto y\circ x\end{array}$

$\exists m$ tel que $\underbrace{x^m}_{\underbrace{x\circ\dots\circ x}_{m \text{ fois}}} = 0$, d'où $\ell_x^m(y) = x^m \circ y = 0$ et $r_x^m = y\circ x^m = 0$.

ℓ_x et r_x commutent : $\forall y \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ $(\ell_x \circ r_x)(y) = \ell_x(y\circ x) = x\circ(y\circ x)$
$(r_x \circ \ell_x)(y) = r_x(x\circ y) = (x\circ y)\circ x$ $=$

Donc $(\operatorname{ad} x)^{2m} = (\ell_x - r_x)^{2m} \underset{\substack{\downarrow \\ \ell_x, r_x \text{ commutent}}}{=} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} \ell_x^k (-1)^{2m-k} r_x^{2m-k} = 0$, car : si $k \geq m$, alors $\ell_x^k = 0$
si $k<m$, alors $2m-k>m$ et donc $r_x^{2m-k} = 0$

Ainsi $\operatorname{ad} x$ est un endo nilpotent.

(2) On montre d'abord que $\widetilde{\operatorname{ad}} x : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est bien défini : $y+\mathfrak{h} = y'+\mathfrak{h} \Leftrightarrow y-y' \in \mathfrak{h}$, d'où
$$\operatorname{ad} x(y') - \operatorname{ad} x(y) = \operatorname{ad} x(y'-y) = [\underbrace{x}_{\in\mathfrak{h}}, \underbrace{y'-y}_{\in\mathfrak{h}}] \in \mathfrak{h} \quad \text{car } \mathfrak{h} \text{ est une sa de Lie de } \mathfrak{g}$$

$\widetilde{\operatorname{ad}} x \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ car $\operatorname{ad} x$ est linéaire : $\forall y,y' \in \mathfrak{g}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a $\widetilde{\operatorname{ad}} x(\lambda y+y') = \operatorname{ad} x(\lambda y + y') + \mathfrak{h} = \lambda \operatorname{ad} x(y) + \operatorname{ad} x(y')$
$+\mathfrak{h} = \lambda(\operatorname{ad} x(y)+\mathfrak{h}) + (\operatorname{ad} x(y')+\mathfrak{h})$ [car $\mathfrak{h} = \lambda\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}+\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ puisque $\mathfrak{h}$ sev de $\mathfrak{g}$]
$= \lambda\, \widetilde{\operatorname{ad}} x(y) + \widetilde{\operatorname{ad}} x(y')$

$\widetilde{\operatorname{ad}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ est linéaire car $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ est linéaire et donc sa restriction $\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ l'est aussi

Il reste à montrer : $\widetilde{\operatorname{ad}}[x,x'] = \widetilde{\operatorname{ad}} x \circ \widetilde{\operatorname{ad}} x' - \widetilde{\operatorname{ad}} x' \circ \widetilde{\operatorname{ad}} x$ $\forall x,x' \in \mathfrak{h}$

Or : $\widetilde{\operatorname{ad}}[x,x'](y) = [[x,x'],y] + \mathfrak{h}$ $\quad -\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}+\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ car $\mathfrak{h}$ sev de $\mathfrak{g}$
$(\widetilde{\operatorname{ad}} x \circ \widetilde{\operatorname{ad}} x' - \widetilde{\operatorname{ad}} x' \circ \widetilde{\operatorname{ad}} x)(y) = [x,[x',y]] + \mathfrak{h} - [x',[x,y]] - \mathfrak{h} = [x,[x',y]] + [[x,y],x'] + \mathfrak{h}$

d'où l'égalité d'après l'identité de Jacobi. $\square$

Le théorème suivant généralise la propriété que si $\varphi \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ est nilpotent, alors φ possède toujours un vecteur propre de valeur propre 0. [On rappelle qu'on suppose $\dim V < \infty$]

THÉORÈME 2 Soit $\mathfrak{g}$ une sa de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ où $V \neq \{0\}$. Si tout $x\in\mathfrak{g}$ est un endomorphisme nilpotent de V, alors $\exists v \neq 0$ tel que $x(v) = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$.

Preuve Par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$, le cas $\dim \mathfrak{g} = 1$ étant la propriété des endos nilpotents d'avoir valeur propre 0.

Supposons que la propriété est vraie pour algèbres de Lie de dim $< \dim \mathfrak{g}$ et on la montre pour $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie (elle existe, car $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\mathbb{K}x$ est une telle). Donc $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$. On peut choisir $\mathfrak{h}$ de dimension maximale parmi celles-ci.

On considère $\widetilde{ad} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. Tout $x \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est un endo nilpotent de V, d'où $ad\,x \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ est un endo nilpotent de $\mathfrak{g}$ (Lemme 4.(1)). Donc $\widetilde{ad}\,x \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ est un endo nilpotent de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, car $\widetilde{ad}\,x(y+\mathfrak{h}) = ad\,x(y) + \mathfrak{h}$ donne $(\widetilde{ad}\,x)^2(y+\mathfrak{h}) = \widetilde{ad}\,x(ad\,x(y)+\mathfrak{h}) = (ad\,x)^2 y + \mathfrak{h}, \dots$ on itère

$$\dots \quad (\widetilde{ad}\,x)^k (y+\mathfrak{h}) = (ad\,x)^k y + \mathfrak{h} \quad \forall k$$

Puisque $\widetilde{ad}(\mathfrak{h})$ est une sa de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$, tout élément $\widetilde{ad}\,x \in \widetilde{ad}\,\mathfrak{h}$ est un endo nilpotent et et $\dim \widetilde{ad}(\mathfrak{h}) \leq \dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$, par l'hypothèse de récurrence, $\exists y_0 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ tel que $\underbrace{\widetilde{ad}\,x(y_0+\mathfrak{h})}_{[x,y_0]+\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$ $\forall x \in \mathfrak{h}$

càd $y_0 + \mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}$ (= vecteur nul de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$)

càd $\exists y_0 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ tel que $[x, y_0] \in \mathfrak{h}$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$. $(*)$

Par conséquent, $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h} + \mathbb{K}y_0 \subset \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h} + \mathbb{K}y_0$ est une sa de Lie d'après $(*)$ et $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

Puisque $\mathfrak{h}$ est de dim max parmi les sa de Lie propres de $\mathfrak{g}$, on conclut que $\mathfrak{h} + \mathbb{K}y_0 = \mathfrak{g}$

Par récurrence appliquée à $\mathfrak{h}$, l'ensemble $V_0 = \{w \in V : x(w) = 0 \ \forall x \in \mathfrak{h}\}$ est un sev $\neq \{0\}$ de V.

$\forall y \in \mathfrak{g}$ on a $y(V_0) \subset V_0$. En effet:

Pour tous $y \in \mathfrak{g}, x \in \mathfrak{h}$ on a $x \circ y = y \circ x + [x,y]$ dans $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, d'où $\forall w \in V_0$

$$x(y(w)) = (x \circ y)(w) = (y \circ x)(w) + \underbrace{[x,y]}_{=0 \text{ car } [\mathfrak{h},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}}(w) = y(\underbrace{x(w)}_{=0}) = 0$$

Donc $\forall y \in \mathfrak{g}$ on a $y \in \mathfrak{gl}(V_0)$

Si on choisit $y = y_0$ comme dans $(*)$, alors $y_0 \in \mathfrak{gl}(V_0)$ est nilpotent comme endo de V et donc de $V_0 \subset V$.

Par conséquent, $\exists \underset{\neq 0}{w_0} \in V_0$ tel que $y_0(w_0) = 0$. Puisque $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbb{K}y_0$, $\forall y = x + \lambda y_0 \in \mathfrak{g}$ on a

$$y(w_0) = (x + \lambda y_0)(w_0) = \underbrace{x(w_0)}_{=0 \text{ car } w_0 \in V_0} + \lambda \underbrace{y_0(w_0)}_{=0 \text{ par construction}}.$$

$\square$