THM. DE ENGEL : $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie sur $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. $\mathfrak{g}$ est nilpotente $\Leftrightarrow \forall x\in\mathfrak{g}$ $\mathrm{ad}\,x\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est endo nilpotent.

PREUVE : $\Leftarrow$: Par récurrence sur $\dim\mathfrak{g}$, le cas $\dim\mathfrak{g}=1$ étant toujours vérifiée car $\mathfrak{g}$ est abélienne (donc nilpotent)

Soit donc $\mathfrak{g}$ avec $\dim\mathfrak{g}>1$ telle que $\mathrm{ad}\,x\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est nilpotent $\forall x\in\mathfrak{g}$.

Donc $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ sa de Lie vérifie les hypothèses du thm 2, d'où $\exists\, 0\neq v\in\mathfrak{g}$ tel que $\mathrm{ad}\,x(v)=0$ $\forall x\in\mathfrak{g}$, càd $0\neq v\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. D'où $\dim(\mathfrak{g}/_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})})<\dim\mathfrak{g}$. On vérifie que $\forall x\in\mathfrak{g}$ $\widetilde{\mathrm{ad}}(x+\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$ est nilpotent. En fait:

$\widetilde{\mathrm{ad}} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}$

$$\forall y\in\mathfrak{g}\qquad \widetilde{\mathrm{ad}}(x+\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))\,(y+\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))=[x+\mathfrak{z}(\mathfrak{g}),\,y+\mathfrak{z}(\mathfrak{g})]=[x,y]+\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=\mathrm{ad}\,x(y)+\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

En itérant, $\forall m$

$$\big(\widetilde{\mathrm{ad}}(x+\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))\big)^m(y+\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))=(\mathrm{ad}\,x)^m(y)+\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

d'où $\widetilde{\mathrm{ad}}(x+\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$ est nilpotent puisque $\mathrm{ad}\,x$ est nilpotent

L'hypothèse de récurrence donne que $\mathfrak{g}/_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}$ est nilpotente, d'où $\mathfrak{g}$ est nilpotent d'après le lemme 2(2). $\square$

Le théorème 2 donne l'étape de récurrence pour montrer que toute sa de Lie $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(V)$ telle que $\forall x\in\mathfrak{g}$, x est un endo nilpotent, peut s'écrire comme sa de Lie de $\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})$.
Pour montrer cette propriété on a besoin de notion de drapeau.

DEF 20 Soit V un e.v. sur $\mathbb{K}$ (de dimension finie)
Un drapeau $\mathcal{V}$ dans V est une suite croissante $\mathcal{V}=[\{0\}=V_0\subset V_1\subset V_2\subset\ldots\subset V_m=V]$ de sev de V. Le drapeau $\mathcal{V}$ est dit complet si $\forall i$ $\dim V_i=i$ (d'où $m=\dim V$)
On associe à $\mathcal{V}$ deux sa de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$

$$\mathfrak{g}(\mathcal{V})=\{x\in\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)\,;\ x(V_j)\subset V_j\quad\forall j=1,2,\ldots,m\}$$
$$\mathfrak{g}^{nil}(\mathcal{V})=\{x\in\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V);\ x(V_j)\subset V_{j-1}\quad\forall j=1,2,\ldots,m\}$$

[Vérifier : $\mathfrak{g}(\mathcal{V})$, $\mathfrak{g}^{nil}(\mathcal{V})$ sont sa de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$]

On visualise $\mathfrak{g}(\mathcal{V})$ et $\mathfrak{g}^{nil}(\mathcal{V})$ au moyen de matrices par blocks:

Si $V=W_1\oplus W_2\oplus\ldots\oplus W_m$ où W_j est sev de V pour tout j et $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup\ldots\cup\mathcal{B}_m$ est base de V qui est réunion de base $\mathcal{B}_j$ de W_j, alors $\forall\varphi\in\mathrm{End}(V)$

$$A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)=\begin{pmatrix}A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1m}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m}\\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm}\end{pmatrix}$$

où $A_{ij}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_j,\mathcal{B}_i}\big(W_j\xrightarrow{\varphi|_{W_j}}V=W_1\oplus\ldots\oplus W_m\xrightarrow{\pi_i}W_i\big)\in M_{i,j}(\mathbb{K})$

et $\pi_i: W=W_1\oplus\ldots\oplus W_m\to W_i$ est la projection sur W_i parallèlement à $W_1\oplus\ldots\oplus W_{i-1}\oplus W_{i+1}\oplus\ldots\oplus W_m$

On applique cette construction à $\mathfrak{g}(\mathcal{V})$: $\quad \mathcal{V} = [\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_m = V]$

On pose $W_1 = V_1$ et pour tout $j = 2, \dots, m$ on choisit un sev W_j de V tel que $V_j = V_{j-1} \oplus W_j$

Donc: $V_2 = \underbrace{V_1}_{W_1} \oplus W_2$, $V_3 = V_2 \oplus W_3 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3, \dots, V = V_m = V_{m-1} \oplus W_m = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_m$

Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_m$ une base de V telle que $\mathcal{B}_j$ est base de W_j $\forall j = 1, \dots, m$.

La condition $x(V_j) \subset V_j$ entraine $x(W_j) \subset x(V_j) \subset V_j = W_1 \oplus \dots \oplus W_j$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x(\mathcal{B}_1) & x(\mathcal{B}_2) & \cdots & x(\mathcal{B}_m) \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \\ 0 & & 0 & A_{mm} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \\ \mathcal{B}_m \end{array} \qquad \text{pour } x \in \mathfrak{g}(\mathcal{V})$$

Pour $\mathfrak{g}^{nil}(\mathcal{V})$, la condition $x(V_j) \subset V_{j-1}$ entraine $x(W_1) \subset x(V_1) = V_0 = \{0\}$

et $\forall j = 2, \dots, m$

$x(W_j) \subset x(V_j) \subset V_{j-1} = W_1 \oplus \dots \oplus W_{j-1}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x(\mathcal{B}_1) & x(\mathcal{B}_2) & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & & A_{1m} \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & A_{m-1,m} \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \\ \mathcal{B}_m \end{array}$$

Si $\mathcal{V}$ est complet, alors que $\forall j$ $W_j = \mathbb{K} v_j$, d'où tous les blocs sont 1×1. On obtient:

Si $\mathcal{V}$ est un drapeau complet de V (avec $\dim V = n$), alors le choix d'une base $\mathcal{B}$ de V comme ci-dessus identifie $\mathfrak{g}(\mathcal{V})$ et $\mathfrak{g}^{nil}(\mathcal{V})$ comme sa de Lie de $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ et $\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$, resp.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}(\mathcal{V}) & \hookrightarrow & \mathfrak{t}_n(\mathbb{K}) \\ x & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g}^{nil}(\mathcal{V}) & \hookrightarrow & \mathfrak{n}_n(\mathbb{K}) \\ x & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$$

<u>COROLLAIRE 3 (COR. DU THM 2)</u> Soit $\mathfrak{g}$ un sa de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ (où $\dim V < \infty$). Supposons que $\forall x \in \mathfrak{g}$, x est endo nilpotent de V. Alors il existe un drapeau complet $\mathcal{V}$ de V tel que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^{nil}(\mathcal{V})$. En particulier, il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que $\forall x \in \mathfrak{g}$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est une matrice triangulaire supérieure stricte. Ainsi $\mathfrak{g}$ est iso à une sa de Lie de $\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ (avec $n = \dim V$). – donc $\mathfrak{g}$ est nilpotente –.

<u>Preuve</u> D'après le théorème 2, $0 \neq v_1 \in V$ tel que $x(v_1) = 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$. On pose $V_1 = \mathbb{K} v_1$.
Ceci montre que le corollaire est vrai si $\dim V = 1$; dans ce cas $\mathcal{V} = [\{0\} = V_0 \subset V_1 = \mathbb{K} v_1 = V]$
Supposons donc que $\dim V > 1$. On considère

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(V/V_1) \\ & x & \longmapsto & \varphi(x) \end{array} \quad \text{déf par} \quad \begin{array}{l} \varphi(x)(v + V_1) = x(v) + V_1 \\ \forall v \in V \end{array}$$

Alors φ est un morphisme d'algèbres de Lie. En fait:

- $\forall x \in \mathfrak{g}$ $\varphi(x) : V/V_1 \to V/V_1$ est bien déf $[\, v + V_1 = v' + V_1 \Leftrightarrow v - v' \in V_1 = \mathbb{K} v_1 \Rightarrow x(v) - x(v') = x(\overbrace{v - v'}^{\in \mathbb{K} v_1}) = 0 \,]$
  $\Rightarrow x(v) + V = x(v') + V$
- φ est linéaire (d'après la déf des opérations d'ev dans $\mathfrak{gl}(V)$)
- $\forall x, x' \in \mathfrak{g}$ on a $\varphi([x, x']) = [\varphi(x), \varphi(x')]$

$$\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V/V_1) \quad \text{déf par} \quad \varphi(x)(v+V_1) = x(v)+V_1 \quad (*)$$
$$x \longmapsto \varphi(x) \qquad\qquad \forall v\in V$$

Alors φ est un morphisme d'algèbres de Lie. En fait:

- $\forall x\in\mathfrak{g}$ $\varphi(x) : V/V_1 \to V/V_1$ est bien déf $[\, v+V_1 = v'+V_1 \Leftrightarrow v-v'\in V_1 = \mathbb{K}v_1 \Rightarrow x(v)-x(v') = x(\underbrace{v-v'}_{\in \mathbb{K}v_1})=0$ $\Rightarrow x(v)+V = x(v')+V$
- φ est linéaire (d'après la déf des opérations d'ev dans $\mathfrak{gl}(V)$)
- $\forall x,x'\in\mathfrak{g}$ on a $\varphi([x,x']) = [\varphi(x),\varphi(x')]$, car $\forall v\in V$

$$\varphi([x,x'])(v+V_1) = [x,x'](v)+V_1 = x(x'(v)) - x'(x(v)) + V_1$$
$$[\varphi(x),\varphi(x')](v+V_1) = \varphi(x)(\varphi(x'))(v+V_1) - \varphi(x')(\varphi(x)(v+V_1))$$
$$= \varphi(x)(x'(v)+V_1) - \varphi(x')(x(v)+V_1)$$
$$= x(x'(v))+V_1 - (x'(x(v))+V_1)$$

= car $V_1 - V_1 = V_1$ sev de V

Donc $\varphi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V/V_1)$ est une sa de Lie.

D'après $(*)$, on a $\varphi(x^m) = \varphi(x)^m$ $\forall m$, d'où $\varphi(x)$ est endo nilpotent car x est endo nilpotent

Par récurrence, V/V_1 possède un drapeau complet $\mathcal{V}' = [\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{m-1} = V/V_1]$ tel que $\varphi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{nil}(\mathcal{V}')$ où $m = \dim V$, d'où $m-1 = \dim(V/V_1)$

(càd $\forall x\in\mathfrak{g}$ $\varphi(x)(W_j) \subset W_{j-1}$ $\forall j = 1,\dots,m-1$)

Soit $\pi : V \to V/V_1$ la projection canonique. On construit $[V_j \to W_{j-1} = V_j/V_1]$

$$\mathcal{V} = [\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{m-1} \subset V_m = V] \quad \text{où} \quad \forall j=1,\dots,m-1 \quad V_j = \pi^{-1}(W_{j-1}) \quad (+)$$

Donc : $\dim V_j = \dim W_{j-1} + 1$ $\forall j = 1,\dots,m$

(et $V_1 = \mathbb{K}v_1$ comme avant)

A montrer : $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^{nil}(\mathcal{V})$, càd $\forall x\in\mathfrak{g}$ $x(V_j) \subset V_{j-1}$ $\forall j = 1,\dots,m$

Si $j=1$: vrai $V_1 = \mathbb{K}v_1$ et $x(v_1) = 0$ et $V_0 = \{0\}$

Si $j = 2,\dots,m$ soit $v\in V_j = \pi^{-1}(W_{j-1})$. Alors $v+V_1 \in W_{j-1}$, d'où

$$x(v)+V_1 = \varphi(x)(v+V_1) \in \varphi(x)(W_{j-1}) \subset W_{j-2}$$

d'où $x(v) \in \pi^{-1}(W_{j-2}) = V_{j-1}$ par construction $(+)$

Ceci complète la récurrence.

On a ainsi trouvé une base $\mathcal{B}$ de V pour laquelle

$$\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{n}_m(\mathbb{K}) \quad [m = \dim V]$$
$$x \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

morphisme injectif d'algèbres de Lie. En particulier $\mathfrak{g} \simeq$ sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})$, est nilpotente. $\square$

<u>REM</u> On a utilisé le théorème 2 pour montrer ce corollaire. D'autre part, tout élément de $\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})$ possède $(1,0,\dots,0)$ comme vecteur propre de valeur propre 0. Donc si $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})$ (par ex. si $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^{nil}(\mathcal{V})$ pour un drapeau complet $\mathcal{V}$), alors automatiquement le thm 2 est vrai. Ainsi : le théorème 2 et son corollaire sont en fait équivalents.

Une algèbre de Lie nilpotente est résoluble.

QUESTION : est-ce qu'il y a un analogue du thm 2 (vecteur propre commun de valeur propre 0) et du corollaire 3 (identification avec un sa de Lie de $\mathfrak{n}_m(\mathbb{K})$ pour un certain m) si $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est une sa de Lie résoluble ?

La réponse est positive : (1) il y a un vecteur propre commun (mais plus vrai qu'il correspond à une valeur propre unique $\forall x \in \mathfrak{g}$)

(2) identification de $\mathfrak{g}$ en tant que sa de $\mathfrak{t}_m(\mathbb{K})$

à condition que $\mathbb{K}$ est algébriquement clos (afin que $\mathbb{K}$ contient tous les valeurs propres nécessaires)
↳ ici donc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Ces résultats vont sur le nom de théorème de Lie

THÉORÈME 3 : On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\mathfrak{g}$ une sa de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ où $V \neq \{0\}$. On suppose que $\mathfrak{g}$ est résoluble. Alors :

(1) $\exists$ un vecteur propre de tous les endomorphismes dans $\mathfrak{g}$
(càd $\exists\, 0 \neq v \in V$ tel que $\forall x \in \mathfrak{g}$ $x(v) = \lambda(x) v$ pour un certain $\lambda(x) \in \mathbb{C}$)

(2) (théorème de Lie) il existe un drapeau complet $\mathcal{V}$ de V tel que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}(\mathcal{V})$.
En particulier, il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est une matrice triangulaire supérieure $\forall x \in \mathfrak{g}$. Donc
$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\hookrightarrow \mathfrak{t}_m(\mathbb{C}) \\ x &\mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{aligned}$$
identifie $\mathfrak{g}$ avec une sa de Lie de $\mathfrak{t}_m(\mathbb{C})$

Preuve : Admise. Réf : Humphreys, § 4.1

COR 4 Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$. Alors : $\mathfrak{g}$ est résoluble $\Leftrightarrow$ $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est nilpotente.

Preuve $\Leftarrow$: Supposons que $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est nilpotent, càd $\exists m$ tel que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^m = \{0\}$

[$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ n'est pas utilisé]

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^1 = [\underbrace{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}_{\mathfrak{g}^{(1)}}, \underbrace{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}_{\mathfrak{g}^{(1)}}] = \mathfrak{g}^{(2)}$$

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^2 = [[\mathfrak{g},\mathfrak{g}], [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^1] \supset [\overbrace{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^1}^{\mathfrak{g}^{(2)}}, \overbrace{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^1}^{\mathfrak{g}^{(2)}}] = \mathfrak{g}^{(3)}$$

⋮

Par récurrence :
$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^m = [\underbrace{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}_{\mathfrak{g}^{(1)}}, \underbrace{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^{m-1}}_{\substack{\supset \mathfrak{g}^{(m)} \\ \text{récurrence}}}] \supset [\mathfrak{g}^{(m)}, \mathfrak{g}^{(m)}] = \mathfrak{g}^{(m+1)}$$

D'où $\mathfrak{g}^{(m+1)} = \{0\}$ si $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^m = 0$, càd $\mathfrak{g}$ résoluble si $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est nilpotente

$\Rightarrow$: Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, alors $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est résoluble. D'après le théorème de Lie $\exists$ base $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{g}$ telle que
$$\begin{aligned} \mathrm{ad}\,\mathfrak{g} &\xrightarrow{\Psi} \mathfrak{t}_m(\mathbb{C}) \\ \mathrm{ad}\,x &\mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{ad}\,x) \end{aligned}$$
identifie $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \cong \Psi(\mathrm{ad}\,\mathfrak{g})$, sa de Lie de $\mathfrak{t}_m(\mathbb{C})$.

Donc
$$\begin{array}{l} \psi([\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}, \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}]) = [\psi(\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}), \psi(\mathrm{ad}\,\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{t}_m(\mathbb{C}), \mathfrak{t}_m(\mathbb{C})] = \mathfrak{n}_n(\mathbb{C}) \\ \shortparallel \\ \psi(\mathrm{ad}\,[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) \\ \cong \\ \mathrm{ad}\,[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \end{array}$$

càd $\mathrm{ad}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est isomorphe à une sa de Lie de $\mathfrak{n}_m(\mathbb{C})$, donc nilpotente car $\mathfrak{n}_n(\mathbb{C})$ l'est.
Ainsi $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est nilpotent [car $\mathfrak{h}$ est nilpotente $\Leftrightarrow$ $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$ nilpotente]

REM : Le cor. 4 est aussi valable si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (voir TD n°2)

§5 FORME DE KILLING

DEF. 20 Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). La forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est la forme bilinéaire $\kappa = \kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ définie pour tout $x\in\mathfrak{g}$ par
$$\kappa(x,y) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}x \circ \mathrm{ad}y) \quad [= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x\,\mathrm{ad}y)]$$

LEMME κ est une forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ qui est :
(1) symétrique : $\forall x,y\in\mathfrak{g}$ $\quad \kappa(y,x) = \kappa(x,y)$
(2) invariante : $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$ $\quad \kappa([x,y],z) = \kappa(x,[y,z])$

Preuve Pour e.v. V sur $\mathbb{K}$ et $a,b,c\in\mathrm{End}(V)$ on a :
(1) $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$
(2) $$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Tr}([a,b]c) = \mathrm{Tr}(abc - bac) = \mathrm{Tr}(abc) - \mathrm{Tr}(bac) \\ \mathrm{Tr}(a[b,c]) = \mathrm{Tr}(abc - acb) = \mathrm{Tr}(abc) - \underbrace{\mathrm{Tr}(acb)}_{\mathrm{Tr}(bac)} \end{array}\right\} =$$
D'où (1) et (2) lorsque $V=\mathfrak{g}$ et a,b,c sont $\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y, \mathrm{ad}z$ (respectiv.), car $\mathrm{ad}[x,y] = [\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y]$ □

EXEMPLE $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) = \{A\in M_2(\mathbb{K}) : \mathrm{Tr}(A)=0\}$. On pose $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\mathcal{B} = \{y, h, x\}$
($\mathbb{K}=\mathbb{R}, \mathbb{C}$)
est une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Le crochet de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ est identifié par les crochets
$$[x,y] = h, \quad [h,y] = -2y, \quad [h,x] = 2x$$

On a
$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{ad}y)}_{Y} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} [y,y] & [y,h] & [y,x] \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} y \\ h \\ x \end{array} \end{array} \qquad \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{ad}h)}_{=H} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} [h,y] & [h,h] & [h,x] \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} y \\ h \\ x \end{array} \end{array} \qquad \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{ad}x)}_{=X} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} [x,y] & [x,h] & [x,x] \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} y \\ h \\ x \end{array} \end{array}$$

$\forall z,w\in\{y,h,x\}$, $Z = \mathrm{ad}z$, $W = \mathrm{ad}w$ on $\kappa(z,w) = \mathrm{Tr}(ZW)$
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\kappa) = \begin{pmatrix} \kappa(y,y) & \kappa(y,h) & \kappa(y,x) \\ \kappa(h,y) & \kappa(h,h) & \kappa(h,x) \\ \kappa(x,y) & \kappa(x,h) & \kappa(x,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car : $\mathrm{tr}(X^2) = \mathrm{tr}(Y^2) = 0$, $\mathrm{tr}(H^2) = 4+4 = 8$
$$YH = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad YX = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad XH = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

DEF 21 Le noyau de $\varkappa_{\mathfrak{g}}$ est l'ensemble $\ker(\varkappa_{\mathfrak{g}}) = \{x \in \mathfrak{g} \,;\, \varkappa_{\mathfrak{g}}(x,y) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g}\}$

On dit que $\varkappa_{\mathfrak{g}}$ est <u>non-dégénérée</u> lorsque $\ker(\varkappa_{\mathfrak{g}}) = \{0\}$

REM La déf 21 est le cas particulier, pour $\varkappa_{\mathfrak{g}}$, de la notion de noyau d'une bilinéaire symétrique.
On rappelle la propriété suivante:
Si $K : V \times V \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique sur l'e.v. V sur $\mathbb{K}$ et soit $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j=1}^{n}$ une base de V. Alors: K est non-dégénérée $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(K) = (K(e_i, e_j))_{j=1}^{n}$ est inversible

EXEMPLE Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, alors $\varkappa_{\mathfrak{g}}$ est non-dégénérée car $\det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varkappa) = 8.16 \neq 0$