$\mathfrak{g}$ algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\kappa_{\mathfrak{g}}$ = forme de Killing
bilinéaire, symétrique, invariante sur $\mathfrak{g}$
$\kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{K}$, $\kappa_{\mathfrak{g}}(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x\, \mathrm{ad}y)$

Le noyau de $\kappa_{\mathfrak{g}}$ $= \mathrm{Ker}(\kappa_{\mathfrak{g}}) = \{x\in\mathfrak{g} : \kappa_{\mathfrak{g}}(x,y)=0 \ \forall y\in\mathfrak{g}\}$
$\kappa_{\mathfrak{g}}$ est non-dégénérée lorsque $\mathrm{Ker}(\kappa_{\mathfrak{g}}) = \{0\}$.

PROP 1 (1) $\mathrm{Ker}(\kappa_{\mathfrak{g}})$ est un idéal de $\mathfrak{g}$
(2) Si $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ est un idéal, alors $\kappa_{\mathfrak{h}} = \kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ lorsqu'on munit $\mathfrak{h}$ du crochet de Lie de $\mathfrak{g}$.

Preuve EXERCICE.

THÉORÈME 4 (Critères de Cartan) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. Alors:
(1) $\mathfrak{g}$ est résoluble $\iff$ $\forall x\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}], \forall y\in\mathfrak{g}$ on a $\kappa_{\mathfrak{g}}(x,y)=0$ (càd $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\mathrm{Ker}(\kappa_{\mathfrak{g}})$)
(2) $\mathfrak{g}$ est semi-simple $\iff$ $\kappa_{\mathfrak{g}}$ est non-dégénérée (càd $\mathrm{Ker}(\kappa_{\mathfrak{g}}) = \{0\}$)

On montrera (2). Pour (1): voir p.ex. Humphreys, §4.3

DEF 22 On dit qu'une algèbre de Lie est la somme directe des idéaux $\mathfrak{g}_1,\dots,\mathfrak{g}_k$ lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$ (somme directe d'e.v.)

REM Si $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$ est somme directe d'idéaux, alors $\forall i,j=1,\dots,k$, $i\neq j$, on a $[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j]\subset\mathfrak{g}_i\cap\mathfrak{g}_j=\{0\}$
Donc $\mathfrak{g}$ coïncide avec la somme directe des algèbres de Lie $(\mathfrak{g}_i,[\cdot,\cdot])$ avec le crochet de Lie induit de celui de $\mathfrak{g}$, selon la définition donnée dans déf. 6.

LEMMA 6 Soit $\mathfrak{j}\subset\mathfrak{g}$ un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{j}^\perp = \{x\in\mathfrak{g} : \kappa_{\mathfrak{g}}(x,y)=0 \ \forall y\in\mathfrak{j}\}$. Alors:
(1) $\mathfrak{j}^\perp$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.
(2) $\mathfrak{j}\cap\mathfrak{j}^\perp$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{j}\cap\mathfrak{j}^\perp = \mathrm{Ker}(\kappa_{\mathfrak{j}})$
(3) Si $\mathfrak{g}$ est semisimple et $\mathfrak{j}\neq\{0\}$, alors $\kappa_{\mathfrak{j}} = \kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{j}\times\mathfrak{j}}$ est non-dégénérée.

Preuve
(1) $\forall x\in\mathfrak{j}^\perp, \forall z\in\mathfrak{g}$ on a $[x,z]\in\mathfrak{j}^\perp$: en effet $\forall y\in\mathfrak{j}$

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathfrak{g}}([x,z],y) &= \kappa_{\mathfrak{g}}(\underset{\in\mathfrak{j}^\perp}{x},\underbrace{[z,y]}_{\subset\mathfrak{j}}) && [\text{car } \kappa_{\mathfrak{g}} \text{ est invariante}]\\ &=0 && [\text{car } x\in\mathfrak{j}^\perp]\end{aligned}$$

(2) $\mathfrak{h}=\mathfrak{j}\cap\mathfrak{j}^\perp$ est un idéal car intersection d'idéaux.
$\mathfrak{j}\cap\mathfrak{j}^\perp = \{x\in\mathfrak{j} : \forall y\in\mathfrak{j}\ \kappa_{\mathfrak{g}}(x,y)=0\} = \{x\in\mathfrak{j} : \kappa_{\mathfrak{j}}(x,y)=0\ \forall y\in\mathfrak{j}\} = \mathrm{Ker}(\kappa_{\mathfrak{j}})$ car $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{j}\times\mathfrak{j}} = \kappa_{\mathfrak{j}}$
Pour montrer que $\mathfrak{h}$ est résoluble, on vérifie le critère de Cartan, càd $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subset\mathrm{Ker}(\kappa_{\mathfrak{h}})$
Or $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}} = \kappa_{\mathfrak{h}}$ et $\forall x,y\in\mathfrak{h}$ $\kappa_{\mathfrak{h}}(x,y) = \kappa_{\mathfrak{g}}(\underset{\mathfrak{j}}{x},\underset{\mathfrak{j}^\perp}{y}) = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\kappa_{\mathfrak{h}})\supset\mathfrak{h}\supset[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$.

(3) Puisque $\mathfrak{g}$ est semisimple et $\mathfrak{j}\cap\mathfrak{j}^\perp$ est idéal résoluble de $\mathfrak{g}$, on a $\mathfrak{j}\cap\mathfrak{j}^\perp \underset{(2)}{\subset} \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \underset{\mathfrak{g}\ \mathrm{ss}}{=} \{0\}$
D'après (2): $\mathrm{Ker}(\kappa_{\mathfrak{j}}) = \mathfrak{j}\cap\mathfrak{j}^\perp = \{0\}$, d'où $\kappa_{\mathfrak{j}}$ est non-dégénérée. $\square$

Preuve du critère de semisimplicité de Cartan : $\mathfrak{g}$ semi-simple $\Leftrightarrow \varkappa_{\mathfrak{g}}$ est non-dégénérée.

$\Rightarrow$: C'est le lemme 6(3) avec $\mathfrak{j}=\mathfrak{g}$ car $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{g}^{\perp}=\mathrm{Ker}(\varkappa_{\mathfrak{g}})$

$\Leftarrow$: On montre que si $\mathfrak{g}$ n'est pas semi-simple, alors $\varkappa_{\mathfrak{g}}$ est dégénérée (càd $\mathrm{Ker}(\varkappa_{\mathfrak{g}})\neq\{0\}$)

Si $\mathfrak{g}$ n'est pas semi-simple, alors $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})\neq\{0\}$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ le plus grand entier tel que $\mathfrak{h}=\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})^{(n)}\neq\{0\}$. Alors $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]=\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})^{(n+1)}=\{0\}$, d'où $\mathfrak{h}\neq\{0\}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$.

On veut montrer que $\mathfrak{h}\subset\mathrm{Ker}(\varkappa_{\mathfrak{g}})$, càd $\forall x\in\mathfrak{h}$ on a $\overbrace{\varkappa_{\mathfrak{g}}(x,y)}^{\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x\,\mathrm{ad}y)}=0$ $\forall y\in\mathfrak{g}$

$\forall x\in\mathfrak{h}, \forall y\in\mathfrak{g}$ $\quad \mathrm{ad}x\,\underbrace{\mathrm{ad}y\,(\mathfrak{g})}_{\subset\mathfrak{g}}\subset\mathfrak{h}$ car $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$

d'où $(\mathrm{ad}x\,\mathrm{ad}y)^2\mathfrak{g}\subset\underbrace{[\underset{\in\,\mathfrak{h}}{x},[y,\underbrace{\mathrm{ad}x\,\mathrm{ad}y(\mathfrak{g})}_{\subset\mathfrak{h}}]}_{\subset\mathfrak{h}}]\subset[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]=0$, d'où $(\mathrm{ad}x\,\mathrm{ad}y)^2=0$, et $\mathrm{ad}x\,\mathrm{ad}y$ est un endo nilpotent de $\mathfrak{g}$, D'où $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x\,\mathrm{ad}y)=0$.

Ainsi $0\neq\mathfrak{h}\subset\mathrm{Ker}(\varkappa_{\mathfrak{g}})$, d'où $\varkappa_{\mathfrak{g}}$ est dégénérée. $\square$

COR. 4 Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semisimple, alors tout idéal $\mathfrak{j}\neq\{0\}$ est semisimple.

Preuve Dans le lemme 6(3) on a montré que dans ces hypothèses $\varkappa_{\mathfrak{j}}$ est non-dégénérée.
Donc $\mathfrak{j}$ est semisimple d'après le critère de semi-simplicité de Cartan. $\square$

REMARQUE/ RAPPELS

Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ une forme bilinéaire symétrique sur un e.v. V sur $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), avec $\dim V<+\infty$.

Soit U un sev de V. On définit:

$$U^{\perp}=\{x\in V : \langle x,y\rangle=0 \ \forall y\in U\}$$

$$\mathrm{Ker}(\langle\cdot,\cdot\rangle)=\{x\in V : \langle x,y\rangle\in V\}$$

Alors $U\cap U^{\perp}=\mathrm{Ker}(\langle\cdot,\cdot\rangle|_{U\times U})$

- Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est non dégénérée, alors $\dim V=\dim U+\dim U^{\perp}$

Preuve A. Knapp, Basic algebra, p. 248-249. $\square$

Toutefois, en général, $U\cap U^{\perp}\neq\{0\}$, donc $V\neq U\oplus U^{\perp}$. Précisement, on a : pour V,U comme ci-dessus : $V=U\oplus U^{\perp}\Leftrightarrow\mathrm{Ker}(\langle\cdot,\cdot\rangle|_{U\times U})=\{0\}$ (càd $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{U\times U}$ est non-dégénérée)

Preuve $U\cap U^{\perp}=\mathrm{Ker}(\langle\cdot,\cdot\rangle|_{U\times U})$, d'où $\mathrm{Ker}(\langle\cdot,\cdot\rangle|_{U\times U})=\{0\}\Leftrightarrow U\cap U^{\perp}=\{0\}$

Donc $\dim(U+U^{\perp})=\underbrace{\dim U+\dim(U^{\perp})}_{=\dim V}-\dim(U\cap U^{\perp})$, d'où $U+U^{\perp}=V\Leftrightarrow\dim(U\cap U^{\perp})=\{0\}$

$\leftarrow$ grassmann. $\square$

<u>LEMME 7</u> Soit $j \subset \mathfrak{g}$ un idéal de l'algèbre de Lie semisimple $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{g}$ est la somme directe des idéaux j et $j^\perp$, càd $\mathfrak{g} = j \oplus j^\perp$, avec $[j, j^\perp] \subset j \cap j^\perp = \{0\}$.

<u>Preuve</u> La décomposition $\mathfrak{g} = j \oplus j^\perp$ est conséquence de la remarque précédente et du lemme 6(2)
Pour $[j, j^\perp] \subset j \cap j^\perp = \{0\}$ d'après le lemme 6(3). □

<u>Rappel</u>: on dit qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est simple si :
(1) $\mathfrak{g}$ n'est pas abélienne
(2) $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéaux différents de $\{0\}$ et $\mathfrak{g}$.

<u>PROP. 2</u> Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semisimple, on peut trouver des idéaux simples $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_k$ de $\mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_k$. (*)
Tout idéal j de $\mathfrak{g}$ est semi-simple et s'écrit comme direct $j = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ où $I \subset \{1, 2, \dots, k\}$
Réciproquement, toute somme directe d'algèbres de Lie simples est une algèbre de Lie semi-simple.

<u>Preuve</u>
Si j est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors j est semisimple (cor 4) et d'après le lemme 7, $\mathfrak{g} = j \oplus j^\perp$ avec $j^\perp$ idéal, donc semisimple.
Supposons que $\mathfrak{g}$ n'est pas simple. Puisque une algèbre de Lie semisimple n'est pas abélienne, alors $\mathfrak{g}$ possède un idéal $j \neq \{0\}, \mathfrak{g}$. Donc $\mathfrak{g} = j \oplus j^\perp$ et $\dim j < \dim \mathfrak{g}$, $\dim j^\perp < \dim \mathfrak{g}$. Par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$, on obtient la décomposition (*).
Soit j un idéal $\neq \{0\}$ de $\mathfrak{g}$. On considère $\pi_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_i$ la projection de $\mathfrak{g}$ sur le i-ème élément de la décomposition (*).

- π_i est un morphisme d'algèbres de Lie (car les $\mathfrak{g}_i$ sont des idéaux)

<u>Pf</u> : linéaire : ✓. $\forall x, y \in \mathfrak{g}$, $x = x_1 + \dots + x_k$, $y = y_1 + \dots + y_k$ avec $x_i, y_i \in \mathfrak{g}_i$ $\forall i$
$\pi_i([x,y]) = \pi_i([\sum_j x_j, \sum_\ell y_\ell]) = \sum_{j,\ell} \pi_i([x_j, y_\ell]) = \sum_j \pi_i([x_j, y_j]) = [x_i, y_i] = [\pi_i(x), \pi_i(y)]$
$[x_j, y_\ell] \in [\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_\ell] \subset \mathfrak{g}_j \cap \mathfrak{g}_\ell = \{0\}$ si $j \neq \ell$
$[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_j$

- $\pi_i(j)$ est un idéal de $\mathfrak{g}_i$ (car π_i est surjective)

<u>Pf</u> $\forall x \in \mathfrak{g}_i$, $\forall y = \pi_i(z)$ avec $z \in j$, puisque π_i est surjective, il existe $w \in \mathfrak{g}$ tel que $x = \pi_i(w)$, d'où
$[x, y] = [\pi_i(w), \pi_i(z)] = \pi_i([w, \underset{\in j}{z}]) \in \pi_i(j)$ car $[w, z] \in j$ (idéal)

$j \neq \{0\}$, d'où il existe un indice i (au moins) tel que $\pi_i(j) \neq \{0\}$
Donc : puisque $\mathfrak{g}_i$ est simple, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\pi_i(j) \neq \{0\}$, on a $\mathfrak{g}_i = \pi_i(j)$

- Si $\pi_i(j) \neq \{0\}$ (donc $\pi_i(j) = \mathfrak{g}_i$), on a $\mathfrak{g}_i \subset j$

<u>Pf</u> $\mathfrak{g}_i = [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = [\mathfrak{g}_i, \pi_i(j)] \overset{1}{=} [\mathfrak{g}_i, j] \subset j$
car $\mathfrak{g}_i$ simple $\Rightarrow Z(\mathfrak{g}_i) = \{0\}$

$\forall x_i \in \mathfrak{g}_i$, $y = y_1 + \dots + y_k \in j$. Alors $y_i = \pi_i(y)$
$[x_i, y] = \sum_j [x_i, y_j] = [x_i, y_i] = [x_i, \pi_i(y)]$
car $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j = \{0\}$ si $i \neq j$
ceci montre 1

Donc $j = \bigoplus_{\substack{i \in \{1, \dots, k\} \\ \pi_i(j) \neq \{0\}}} \mathfrak{g}_i$ et $\pi_i(j) = \begin{cases} \mathfrak{g}_i & \text{si } \pi_i(j) \neq \{0\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- Soit maintenant $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\dots\oplus\mathfrak{g}_m$ une somme direct d'algèbres de Lie simples. Si $\mathfrak{j}\subset\mathfrak{g}$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$, alors le même argument ci-dessus montre que $\pi_i(\mathfrak{j})=\{0\}$ $\forall i=1,\dots,k$ car $\mathfrak{g}_i$ n'est pas résoluble [Rem: dans la somme direct d'algèbres de Lie, le crochet est tel que $[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j]=\{0\}$ $\forall i\neq j$]

D'où $\mathfrak{j}=\{0\}$. $\mathfrak{g}$ ne possède donc aucun idéal résoluble $\neq\{0\}$, d'où $\mathfrak{g}$ est semi-simple. □

§6 ALGEBRES DE LIE REDUCTIVES

DEF 23 On dit qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est réductive si pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ il existe un idéal $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}$.

REMARQUES

① semisimple $\Rightarrow$ réductive (avec $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}^\perp$)

② Rappels:
- une représentation est dite complètement irréducible si elle se décompose comme somme direct de sous-reps irréductible
- TD n°1 : la rep (π,V) de $\mathfrak{g}$ est complètem. irréd. (où $\dim V<\infty$) si et seulement si tous sev W de V qui est π-invariant possède un supplémentaire π-invariant (càd $\exists$ sev W' π-invariant tel que $V=W\oplus W'$)

Donc:

$\mathfrak{g}$ est réductive $\Leftrightarrow$ $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est complètement irr.

PROP. 3 Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive.

(1) Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sont réductives.

(2) $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\oplus\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ et $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est semisimple

(3) $\mathfrak{g}$ est semisimple $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=\{0\}$

Preuve

(1) EXERCICE

(2) Soit $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\oplus\mathfrak{h}$ (il existe car $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}$ est réductive)
On veut montrer que $\mathfrak{h}=\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.
Or, $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{car } \mathfrak{h} \text{ idéal de } \mathfrak{g}}}{[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]\subset}\ \mathfrak{h}\cap\underset{\text{car } \mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}}{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}=\{0\}$, d'où $[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]=\{0\}$, càd $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Pour $\mathfrak{h}\supset\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$: d'après (1), $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est réductive, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est un idéal de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Donc $\exists$ $\mathfrak{b}$ idéal de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ tel que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))\oplus\mathfrak{b}$. Alors $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]\subset\mathfrak{b}$, d'où $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=\{0\}$. Ceci montre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{h}$ [$\forall z\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, On écrit $z=z_1+z_2$ avec $z_1\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et $z_2\in\mathfrak{h}\subset\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, d'où $z_1=z-z_2\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=0$, d'où $z=z_1\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$]
Ainsi $\mathfrak{h}=\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\oplus\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Pour montrer que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est semisimple, d'après (1), $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ réductive, d'où $ad : [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \to \mathfrak{gl}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$ se décompose en ad-irréductibles, càd $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_k$ où $\mathfrak{h}_j$ sont des $\underbrace{\text{idéaux}}_{=\text{ad-invariant}}$ ad-irréductibles de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$

L'argument utilisé avant avec $\mathfrak{h}_j$ au lieu de $\mathfrak{z}$ montre que $\mathfrak{h}_j$ ne peuvent pas être abéliens. Donc : ad-irréductible + non abéliens $\Rightarrow$ $\mathfrak{h}_j$ simples.

D'après la prop. 2, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est semi-simple.

(3) Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, alors $\mathfrak{g} \overset{(2)}{=} [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, qui est semisimple d'après (2)

Réciproquement, on avait déjà montré que si $\mathfrak{g}$ est semisimple, alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. □

EXAMPLE

1. $\mathfrak{g}$ abélienne $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ réductive ($[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 0$)
   $\mathfrak{g}$ semisimple $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ réductive

2. $\mathfrak{gl}(V)$, où V est un e.v. de dim finie, est une algèbre de Lie réductive (non semisimple)

$[\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V) = \{\varphi \in End(V) : Tr\varphi = 0\}$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}(V)) = \mathbb{C}\, id_V$

2'. $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ est réductive, $[\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}), \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})] = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})) = \mathbb{C} I_n$