Feuille d'exercices I

Par la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si pas indiqué autrement, toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est de dimension finie.

Exercice 1
Classifier les algèbres de Lie sur $\mathbb{C}$ de dimension 1 ou 2.

Exercice 2
Soient

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{sp}_n(\mathbb{K}) = \{x \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{K}) : x^t J_n + J_n x = 0\},$$

où x^t dénote la transposée de la matrice x.

1. Montrer que $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{K})$.
2. En écrivant les éléments de $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{K})$ en tant que matrices par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où $A, B, C, D \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, caractériser les matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 3
Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et V un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$. Montrer que le normalisateur de V dans $\mathfrak{g}$, qui est défini par

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(V) = \{x \in \mathfrak{g} : \operatorname{ad} x(V) \subset V\} = \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] \in V \text{ pour tout } y \in V\},$$

est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

Exercice 4
Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie sur $\mathbb{K}$. Montrer les propriétés suivantes :

1. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Alors l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, muni du crochet de Lie
$$[x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}] = [x, y] + \mathfrak{a} \quad \text{pour tout } x, y \in \mathfrak{g},$$
est une algèbre de Lie telle que l'application quotient $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, définie pour tout $x \in \mathfrak{g}$ par $\pi(x) = x + \mathfrak{a}$, est un morphisme d'algèbres de Lie.
2. Si $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie, alors $\varphi(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{h}$, $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et $\varphi(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{g}/\operatorname{Ker}(\varphi)$ où $\simeq$ dénote un isomorphisme d'algèbres de Lie.
3. Soit φ comme dans **2**. et et soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Ker}(\varphi)$. Il existe un unique morphisme d'algèbres de Lie $\psi : \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \to \mathfrak{h}$ tel que $\psi \circ \pi = \varphi$, où $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est l'application quotient.
4. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, alors $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ et $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}) \simeq \mathfrak{g}\mathfrak{b}$.
5. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Tout idéal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est de la forme $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ où $\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ qui contient a.
6. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ sont deux idéaux de $\mathfrak{g}$ et $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.
7. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de $\mathfrak{g}$, alors $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Exercice 5
Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et $x \in \mathfrak{gl}(V)$ diagonalizable de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer que toutes les valeurs propres de $\operatorname{ad} x$ sont de la forme $\lambda_i - \lambda_j$ où $i, j = 1, \ldots, n$.

Exercice 6
Montrer que $[\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}), \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})] = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, où $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \{x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) : \operatorname{trace}(x) = 0\}$, et que le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}))$ de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}I$, où I est la matrice identité.

Exercice 7
Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n. Montrer que la representation standard de $\mathfrak{gl}_K(V)$ sur $\mathbb{K}^n$ est irréductible.

Exercice 8
Montrer que la représentation (π, V) est complétement irréductible si et seulement si tout sous-espace vectoriel W de V qui est π-invariant possède un complémentaire π-invariant (c'est-à-dire, il existe un sous-espace vectoriel W' de V tel que W' est π-invariant et $V = W \oplus W'$).

Exercice 9
Déterminer les représentations de dimension 1 d'une algèbre de Lie parfaite.

Exercice 10
Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie arbitraire, alors $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ est semisimple.

Exercice 11
Soit $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ l'algèbre associative des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ à valeurs complexe. On note $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ l'algèbre de Lie (de dimension infinie) des opérateirs opérateurs $\mathbb{C}$-linéaires $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ munie des opérations usuelles de somme et multiplication scalaire (c'est-à-dire pour tous $S, T \in \mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on définit $S + T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ et $\lambda S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ par $(S + T)(f) = S(f) + T(f)$ et $(\lambda T)(f) = \lambda T(f)$ pour tout $f \in \mathcal{A}$) et du crochet de Lie $[S, T] = S \circ T - T \circ S$. On considère les applications linéaires $P, Q, Z : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ définies pour tout $f \in \mathcal{A}$ et $x \in \mathbb{R}$ par

$$Pf(x) = i\frac{df}{dx}(x)\,, \qquad Qf(x) = xf(x)\,, \qquad Zf(x) = if(x)\,.$$

1. Montrer que $[P, Q] = Z$ et $[P, Z] = [Q, Z] = 0$. En déduire que $\mathfrak{h} = \mathrm{Vect}\,\{P, Q, Z\}$ muni du crochet de Lie induit de celui de $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ est une sous-algèbre de Lie de dimension 3 de $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.
2. Montrer que l'application $D : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ définie par $DP = Q, DQ = -P, DZ = 0$ est une dérivation de $\mathfrak{h}$.
3. Soit $\mathfrak{n}_3(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$. Montrer que $\mathfrak{h}$ est isomorphe en tant qu'algèbre de Lie à $\mathfrak{n}_3(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$.
4. Calculer le centre, la suite centrale et la suite dérivée de $\mathfrak{h}$. Est-ce que $\mathfrak{h}$ est simple, ou semisimple, ou nilpotente, ou résoluble, ou aucune de ces propositions ne convient ?
5. Soit $H \in \mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ l'opérateur défini par $Hf(x) = \dfrac{i}{2}\Big(-\dfrac{d^2 f}{dx^2}(x) + x^2 f(x)\Big)$. Montrer que $H = \dfrac{i}{2}(P^2 + Q^2)$.
6. Montrer que $\mathfrak{o} = \mathrm{Vect}\,\{P, Q, Z, H\}$ est une sous-algèbre de Lie de dimension 4 de $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.

Exercice 12
Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de $\mathfrak{g}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^{2n} \subset \mathfrak{a}^n + \mathfrak{b}^n$.
2. Déduire de **1**. que si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux nilpotents de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ l'est aussi.

Exercice 13
Donner un exemple d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ qui possède un idéal $\mathfrak{n}$ tel que $\mathfrak{n}$ est nilpotent, $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ est nilpotent, mais $\mathfrak{g}$ ne l'est pas.

Exercice 14
Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et $\mathfrak{h}$ un idéal nonzero de $\mathfrak{g}$. Montrer que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ où $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est le centre de $\mathfrak{g}$. En déduire que si $\mathfrak{g}$ est nilpotente et $\neq \{0\}$, alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.