Université de Lorraine - Metz Année universitaire 2020 - 2021
Algèbres de Lie - M2 (MFA)

Feuille d'exercices II

Par la suite, on supposera que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1
Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ sa complexification.

1. Montrer que $[\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{g}_\mathbb{C}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_\mathbb{C}$.

2. Montrer que $\mathfrak{g}$ est abélienne (respectivement nilpotente, résoluble) si et seulement si $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ l'est.

3. Montrer que $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotente.

4. Montrer que les formes de Killing de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ sont liées par la relation :

$$\kappa_{g_\mathbb{C}}(x, y) = \kappa_\mathfrak{g}(x, y) \quad \text{pour tous } x, y \in \mathfrak{g}.$$

5. Montrer que $\mathfrak{g}$ est semisimple si et seulement si $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ l'est.

Exercice 2
Soit $\kappa_\mathfrak{g}$ la forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

1. Montrer que le noyau $\mathrm{Ker}(\kappa_\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

2. Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors $\kappa_\mathfrak{h} = \kappa_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$.

Exercice 3
Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive et $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Montrer que $\mathfrak{h}$ (considéré en tant que sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$) et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (muni de la structure d'algèbre de Lie quotiente) sont réductifs.

Exercice 4
Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ qui est semisimple et (V, ρ) une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ qui est *fidèle* (c'est-à-dire injective).
On définit une forme bilinéaire $\kappa_\rho : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ par

$$\kappa_\rho(x, y) = \mathrm{trace}(\rho(x) \circ \rho(y))$$

pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$. Par exemple, $\kappa_{\mathrm{ad}} = \kappa_\mathfrak{g}$.
On peut montrer (et ça sera admis ici) :

(a) κ_ρ est une forme bilinéaire symétrique,

(b) κ_ρ est invariante, c'est-à-dire $\kappa_\rho([x, y], z) = \kappa_\rho(x, [y, z])$ pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$,

(c) κ_ρ est non-dégénérée..

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, n_n\}$ et $\mathcal{B}^* = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ deux bases de $\mathfrak{g}$ qui sont duales dans κ_ρ, c'est-à-dire $\kappa_\rho(e_i, \varepsilon_j) = \delta_{i,j}$ (= le symbole de Kronecker, égale à 1 si $i = j$, et 0 sinon) pour tous i, j. L'*élément de Casimir* de π est l'endomorphisme de V défini par

$$C_\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho(e_i) \circ \rho(\varepsilon_i)\,.$$

1. Montrer que la définition de C_ρ ne dépend pas du choix des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$ duales dans κ_ρ.

2. Pour $x \in \mathfrak{g}$ et $i, j = 1, \dots, n$ on définit $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{K}$ par

$$[x, e_i] = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} e_j \quad \text{et} \quad [x, \varepsilon_i] = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \varepsilon_j\,.$$

En utilisant (b), montrer que $a_{i,j} = -b_{j,i}$ pour tous i, j.

3. Montrer que C_ρ est un opérateur d'entrelacement pour ρ, c'est-à-dire une application linéaire sur V qui commute avec $\rho(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

[*Indication :* Calculer $C_\rho \rho(x) - \rho(x) C_\rho$ et utiliser **2.**]

4. Calculer la trace de C_ρ.

5. On suppose maintenant que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que si (V, ρ) est irréductible, alors $C_\rho = \lambda \operatorname{Id}_V$ pour un certain scalaire λ. Déterminer λ.

6. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ et ρ la représentation standard de $\mathfrak{g}$.

(a) Calculer κ_ρ.

(b) On considère la base $\mathcal{B} = \{y, h, x\}$ de $\mathfrak{g}$ où $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la base $\mathcal{B}^*$ de $\mathfrak{g}$ qui est duale à $\mathcal{B}$ pour κ_ρ.

(c) Calculer C_ρ.

Exercice 5

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et soit (V, ρ) une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$. On note V^* l'espace vectoriel dual de V (c'est-à-dire l'espace des applications linéaires $V \to \mathbb{K}$). La *représentation contrégrediente* (ou *représentation duale*) de (V, ρ) est la representation (V^*, ρ^*) définie pour tous $x \in \mathfrak{g}$ et $\omega \in V^*$ par $\rho * (x)(\omega) = -\omega \circ \rho(x)$.

1. Montrer que (V^*, ρ^*) est bien une représentation de $\mathfrak{g}$.

2. Montrer que (V, ρ) est irréductible si et seulement si (V^*, ρ^*) l'est.

Remarque : La représentation contragredient de la représentation adjointe d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ s'appelle la *représentation coadjointe* de $\mathfrak{g}$ et est notée $\operatorname{ad}^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$.

Exercice 6

Le but de cet exercice est de montrer la propriété suivante : soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple sur $\mathbb{C}$ et soient β et κ deux formes bilinéaires symétriques invariantes et non-dégénérées sur $\mathfrak{g}$. Alors β et γ sont proportionnelles.

1. On définit $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ par $\phi(x) = \beta_x$ où $\beta_x(y) = \beta(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$. Montrer que ϕ est un opérateur d'entrelacement entre les représentations ad et ad* de $\mathfrak{g}$.

2. On définit $\psi : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ par $\psi(\omega) = \psi_\omega$ où $\psi_\omega \in \mathfrak{g}$ est déterminé par la condition que $\omega(x) = \kappa(\psi_\omega, x)$ pour tous $x \in \mathfrak{g}$. Montrer que ψ est bien défini et un opérateur d'entrelacement entre les représentations ad et ad* de $\mathfrak{g}$.

3. Déduire des deux premières questions qu'il existe un scalaire $\psi \circ \phi = \lambda \operatorname{Id}_{\mathfrak{g}}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ est un scalaire.

4. Calculer ψ_{β_x} pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

5. Conclure.

Exercice 7

Soit $\beta : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \times \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ définie par $\beta(x, y- = \operatorname{trace}(x, y)$ pour tout $x, y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que β est une forme bilinéaire, symétrique et invariante sur $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ qui est simple. Montrer que $\beta|_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}}$ est non-dégénérée.

3. On peut montrer (on l'as fait pour $n = 2$ et on l'admettra dans cette question) que $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre de Lie simple de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.
Utiliser la propriété énoncée dans l'exercice 6 pour calculer la forme de Killing de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.