Übung 1: Lösungen

1. Jede Multilinearform $\omega \in \otimes^k V^*$ ist eine Linearkombination von Elementen aus $\mathcal{B}^k$:
Für alle $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ definieren wir $a_{i_1\ldots i_k} := \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$. Dann

$$\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} a_{i_1\ldots i_k}\, \omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_k}.$$

Um diese Gleichung zu prüfen, bemerkt man, daß

$$\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} a_{i_1\ldots i_k}\, \omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_k}\Big)(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = a_{j_1\ldots j_k} \qquad \text{für alle } j_1, \ldots, j_k.$$

$\mathcal{B}^k$ besteht aus linear unabhängigen Vektoren, weil $\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} a_{i_1\ldots i_k}\omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_k} = 0$ auch

$$a_{i_1\ldots i_k} = \Big(\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} a_{j_1\ldots j_k}\omega_{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{j_k}\Big)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = 0(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = 0$$

für alle $i_1 \ldots i_k$ impliziert.

2. (a) Es sei $\rho := (ij)$ die Transposition der Indizes i und j. Da $\{\pi \circ \rho : \pi \in \mathcal{P}_k\} = \mathcal{P}_k$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}\ \omega(\ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots) &= \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in\mathcal{P}_k} \mathrm{sign}(\pi)\omega(\ldots, v_{\pi(j)}, \ldots, v_{\pi(i)}, \ldots)\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in\mathcal{P}_k} \mathrm{sign}(\pi)\omega(\ldots, v_{\pi\circ\rho(i)}, \ldots, v_{\pi\circ\rho(j)}, \ldots)\\
&= \mathrm{sign}(\rho)\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in\mathcal{P}_k} \mathrm{sign}(\pi)\mathrm{sign}(\rho)\omega(\ldots, v_{\pi\circ\rho(i)}, \ldots, v_{\pi\circ\rho(i)}, \ldots)\\
&= \mathrm{sign}(\rho)\mathrm{Alt}\ \omega(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots)\\
&= -\mathrm{Alt}\ \omega(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots).
\end{aligned}$$

(b) $\Leftarrow$ folgt sofort aus (a). $\Rightarrow$: Wenn $\omega \in \wedge^k V^*$, dann $\omega(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}) = \mathrm{sign}(\pi)\omega(v_1, \ldots, v_k)$ für alle $\pi \in \mathcal{P}_k$. Also für alle $v_1, \ldots, v_k$

$$\mathrm{Alt}\ \omega(v_1, \ldots, v_k) := \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in\mathcal{P}_k} \mathrm{sign}(\pi)\omega(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}) = \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in\mathcal{P}_k} \omega(v_1, \ldots, v_k) = \omega(v_1, \ldots, v_k).$$

(c) Die Linearität ist klar. Alt ist surjektiv wegen (b), weil $\omega = \mathrm{Alt}\ \omega$ für alle $\omega \in \wedge^k V^*$.

3. Wegen Linearität, Assoziativität und Alternierung des äußeren Produkt von Linearformen:

$$\begin{aligned}
&(3\omega_2 \wedge \omega_3 - \omega_1 \wedge \omega_3) \wedge (\omega_1 - 2\omega_2)\\
&\quad = (3\omega_2 \wedge \omega_3) \wedge \omega_1 - (\omega_1 \wedge \omega_3) \wedge \omega_1 - (3\omega_2 \wedge \omega_3) \wedge 2\omega_2 + (\omega_1 \wedge \omega_3) \wedge 2\omega_2\\
&\quad = 3\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 - 0 - 0 + 2\omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2\\
&\quad = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3.
\end{aligned}$$

4*. $\omega = 0$ ist immer zerlegbar als $0 = 0 \wedge 0$. Insbesondere besteht $\wedge^2 V^* = \{0\}$ nur aus der zerlegbaren 2-Form 0, wenn $\dim V = 1$. Wir kann dann nur den Fall $0 \neq \omega \in \wedge^2 V^*$ mit $\dim V =: n > 1$ betrachten.

$n = 2$: Jede $\omega \in \wedge^2 V^*$ ist zerlegbar. Es sei $\{\omega_1, \omega_2\}$ eine Basis von V^*. Dann ist $\{\omega_1 \wedge \omega_2\}$ eine Basis von $\wedge^2 V^*$. Also $\omega = a\omega_1 \wedge \omega_2$ mit $a \in \mathbb{R}$. Wir können z.B. $\mu_1 = a\omega_1$ und $\mu_2 = \omega_2$ wählen.

$n = 3$: Jede $\omega \in \wedge^2 V^*$ ist zerlegbar. Es sei $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ eine Basis von V^*. Dann ist $\{\omega_1 \wedge \omega_2, \omega_1 \wedge \omega_3, \omega_2 \wedge \omega_3\}$ eine Basis von $\wedge^2 V^*$. Also

$$\omega = a_{12}\omega_1 \wedge \omega_2 + a_{13}\omega_1 \wedge \omega_3 + a_{23}\omega_2 \wedge \omega_3$$

mit $a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{R}$. Da $\omega \neq 0$, ist mindestens ein der Koeffizienten $\neq 0$. Es sei z.B. $a_{12} \neq 0$. Wegen $\omega_3 \wedge \omega_3 = 0$ gilt

$$a_{12}\omega_1 \wedge \omega_2 + a_{13}\omega_1 \wedge \omega_3 + a_{23}\omega_2 \wedge \omega_3 = [a_{12}\omega_1 - a_{23}\omega_3] \wedge [\omega_2 + \frac{a_{13}}{a_{12}}\omega_3].$$

Daraus folgt $\omega = \mu_1 \wedge \mu_2$ mit

$$\mu_1 = a_{12}\omega_1 - a_{23}\omega_3 \qquad \text{und} \qquad \mu_2 = \omega_2 + \frac{a_{13}}{a_{12}}\omega_3.$$

$n \geq 4$: Es gibt nicht-zerlegbare alternierende 2-Formen. Es sei z.B. $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_4$, wobei $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_n\}$ eine Basis von V^* ist. $\omega = \mu_1 \wedge \mu_2$ würde $\omega \wedge \omega = \mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \mu_1 \wedge \mu_2 = 0$ implizieren. Aber $\omega \wedge \omega = (\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_4) \wedge (\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_4) = 2\, \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \neq 0$.

Übung 2: Lösungen

1. (a) Da ω multilinear und alternierend ist, folgen die Multilinearität und Alternierung von $\iota_v\omega$ sofort. Wir schreiben $v = \sum_{h=1}^n v_h e_h$ und setzen für jede $h_1 < \cdots < h_{k-1}$

$$\begin{aligned} a_{h_1\ldots h_{k-1}} &:= \iota_v(\omega_I)(e_{h_1},\ldots,e_{h_{k-1}}) \\ &= \omega_I(v, e_{h_1},\ldots,e_{h_{k-1}}) \\ &= \sum_{h=1}^n v_h \omega_I(e_h, e_{h_1},\ldots,e_{h_{k-1}}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } \{h_1,\ldots,h_{k-1}\} \not\subseteq \{i_1,\ldots,i_k\} \\ (-1)^{r-1} v_{i_r} & \text{if } \{h_1,\ldots,h_{k-1}\} = \{i_1,\ldots,\widehat{i_r},\ldots,i_k\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dabei bedeutet das Dach über i_r, daß i_r wegzulassen ist. Wir bemerken, daß $(-1)^{r-1} = \operatorname{sign}\binom{i_1 \;\ldots\ldots\; i_r \;\ldots\; i_k}{i_r \; i_1 \;\ldots\; \widehat{i_r} \;\ldots\; i_k}$. Also

$$\begin{aligned} \iota_v(\omega_I) &= \sum_{h_1<\cdots<h_{k-1}} a_{h_1\ldots h_{k-1}}\, \omega_{h_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{h_k} \\ &= \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} v_{i_r}\, \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_{i_r}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k}. \end{aligned}$$

(b) Es sei $\omega \in \wedge^* V^n$ von Null verschieden. Dann $\omega = a\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ mit $0 \neq a \in \mathbb{R}$. Die Linearität von ω in dem ersten Argument zeigt, daß die Abbilbung $v \mapsto \iota_v\omega$ linear ist. Sie ist injektiv: nach (a) ist

$$\iota_v\omega = a\iota_v(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n) = a\sum_{h=1}^n (-1)^{h-1} v_h \omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_h} \wedge \cdots \wedge \omega_n,$$

und $\iota_v\omega = 0$ impliziert $v_h = 0$ für alle $h = 1,\ldots,n$ wegen der linear Unabhängigkeit von $\{\omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_h} \wedge \cdots \wedge \omega_n : h = 1,\ldots,n\}$. Da $\dim V = \dim \wedge^{n-1} V^*$, ist jede lineare injektive Abbildung ein Isomorphismus.

(c) Aus (b) folgt sofort, daß

$$\iota_{e_h}\omega = (-1)^{h-1}\omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_h} \wedge \cdots \wedge \omega_n.$$

2. Es seien $\omega_1,\ldots,\omega_k \in V^*$ linear unabhängig. Dann kann man $\omega_{k+1},\ldots,\omega_n \in V^*$ finden, so daß $\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ eine Basis von V^* ist. Jede Basis von V^* ist die duale Basis einer Basis von V. Also sei $\{e_1,\ldots,e_n\}$ die Basis von V mit duale Basis $\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$. Es gilt $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \neq 0$, weil z.B.

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k(e_1,\ldots,e_k) = 1 \neq 0.$$

Umgekehrt seien $\omega_1,\ldots,\omega_k \in V^*$ linear abhängig: es gibt eine Linearkombination $a_1\omega_1 + \cdots + a_k\omega_k = 0$ mit Koeffizienten $a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{R}$, die nicht alle gleich Null ist. Es sei z.B. $a_1 \neq 0$. Dann $\omega_1 = b_2\omega_2 + \cdots + b_k\omega_k$ mit $b_k := -a_k/a_1$ und

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = \sum_{j=2}^k b_j(\omega_j \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k) = 0.$$

Wenn $\omega \in \wedge^k V^*$ zerlegbar ist, gibt es $\mu_1,\ldots,\mu_k \in V^*$, so daß $\omega = \mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_k$. Da $\mu_1,\ldots,\mu_k$, $\mu_1,\ldots,\mu_k$ linear abhängig sind, erhalten wir

$$\omega \wedge \omega = \mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_k \wedge \mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_k = 0.$$

Übung 3: Lösungen

1. (a) Da $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist $GL_n(\mathbb{R})$ offen in $M_n(\mathbb{R}) \cong R^{n^2}$, und deshalb eine Untermannigfaltigkeit der Dimension n^2. Allgemeiner gilt folgende Eigenschaft: *Jede offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^m$ ist immer eine m-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$* (Man kann eine einige Karte für U wählen, und zwar (U, id), wobei $\mathrm{id} : x \mapsto x$ die identische Abbildung ist).

(b) Die Abbildung $F : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ gegeben durch $F(A) := A^tA - I$ ist C^∞ und $O(n) = F^{-1}(0)$. Nach dem Satz über die Nullstellenmengen von differenzierbaren Abbildungen ist $O(n)$ eine C^∞-Untermannigfaltigkeit von $M_n(\mathbb{R}) \cong R^{n^2}$, wenn es zu jedem Punkt $A \in O(n)$ eine offene Umgebung U_A gibt, so daß $F : U_A \to S_n(\mathbb{R})$ eine Submersion ist. Wir haben in der Vorlesung bemerkt, daß eine solche Umgebung U_A existiert, immer wenn $F'(A)$ surjektiv ist.

Man kann rechnen, daß für alle $X \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} F'(A)(X) &= \frac{d}{ds} F(X + sA)\Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}\left[(X+sA)^t(X+sA)+I\right]\Big|_{s=0} \\ &= X^tA + A^tX. \end{aligned}$$

Es sei $A \in O(n)$. Dann ist $F'(A) : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ surjektiv, wenn $X^tA + A^tX = B$ eine Lösung X für jedes $B \in S_n(\mathbb{R})$ hat. Wenn $X \in M_n(\mathbb{R})$ eine Lösung von $A^tX = \frac{1}{2}B$ ist, dann ist X auch eine Lösung von $X^tA + A^tX = B$, weil $B^t = B$:

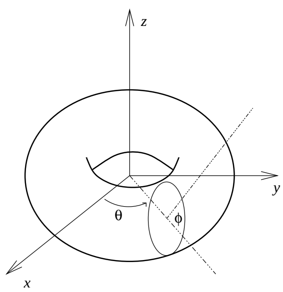
$$X^tA + A^tX = (A^tX)^t + A^tX = \frac{1}{2}B^t + \frac{1}{2}B = B.$$

Wir bemerken, daß jedes $A \in O(n)$ invertierbar ($(\det A)^2 = 1$) mit Inverse $A^{-1} = A^t$ ist. Eine Lösung von $A^tX = \frac{1}{2}B$, d.h. von $A^{-1}X = \frac{1}{2}B$, ist dann $X = \frac{1}{2}AB$. Also: für alle $A \in O(n)$ ist $F'(A) : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ surjektiv, und wir sind fertig.

Die Dimension von $O(n)$ ist $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

2. Eine Karte (U, φ) für T, so daß $(0,1,0) \in \varphi(U)$ ist z.B. folgendes: $U =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\varphi(\theta, \phi) := (x, y, z) \text{ mit } \begin{cases} x &= (2 + \cos\phi)\cos\theta \\ y &= (2+\cos\phi)\sin\theta \\ z &= \sin\phi \end{cases}$$



für alle $(\theta, \phi) \in U$. Dann $\varphi(U) = T \setminus L$ mit

$$L = \{(x,y,z) : (x-2)^2 + z^2 = 1, y = 0\} \cup \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 9, z = 0\},$$

und $(0,1,0) = \varphi(\pi/2, \pi)$.

Man kann einfach rechen, daß $\mathrm{Rang} D\varphi(\theta,\phi) = 2$, weil

$$D\varphi(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -(2+\cos\phi)\sin\theta & -\sin\phi\cos\theta \\ (2+\cos\phi)\cos\theta & -\sin\phi\sin\theta \\ 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Es ist auch klar, daß φ eine Einbettung von U nach $\varphi(U)$ mit der von $\mathbb{R}^3$ induzierten Topologie ist.

Übung 4: Lösungen

1. (a) $M = F^{-1}(0)$ mit $F(x,y,z) := f(x,y) - z$. Da

$$DF(p) = [\frac{\partial f}{\partial x}(p) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) \quad -1]$$

ist F eine Submersion. Also für alle $p = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in M$

$$N_pM = \mathbb{R}\,\mathrm{grad}F(p) = \mathbb{R}\big(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), -1\big),$$
$$T_pM = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, \mathrm{grad}F(p)\rangle = 0\} = \mathrm{span}_{\,\mathbb{R}} \left\{\big(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(p)\big), \big(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(p)\big)\right\}.$$

(b)

$$T_pM = \mathrm{span}_{\,\mathbb{R}} \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\right\}$$

wobei

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\big)$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\big)$$

und

$$N_pM = \mathbb{R}\big(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\big).$$

(c) (1) Aus (a) mit

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

erhalten wir

$$T_{(0,1,1)}M = \mathrm{span}_{\,\mathbb{R}}\{(1,0,0), (0,1,2)\}$$
$$N_{(0,1,1)}M = \mathbb{R}(0, 2, -1)$$

(2) Da $(0,1,1) = \varphi(1,1)$ und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \big(\cos(\frac{\pi}{2}v), \sin(\frac{\pi}{2}v), 0\big)$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \big(-\frac{\pi}{2}u\sin(\frac{\pi}{2}v), \frac{\pi}{2}u\cos(\frac{\pi}{2}v), 2v\big),$$

erhalten wir aus (b)

$$T_{(0,1,1)}M = \mathrm{span}_{\,\mathbb{R}}\{(0,1,0), (-\frac{\pi}{2}, 0, 2)\}$$
$$N_{(0,1,1)}M = \mathbb{R}(2, 0, \frac{\pi}{2})$$

2. Aus $F'(I)(X) = X^t + X$ folgt sofort

$$T_IO(n) = \ker F'(I) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) : X^t + X = 0\}$$ (=schief-symmetrische Matrizen in $M_n(\mathbb{R})$).

Übung 5: Lösungen

1. (a) Da $d\varphi_i(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(p)\, dt_j(p)$ für alle $p \in U$, folgt aus dem Satz in 1.8 (Satz 11 im Skript) mit $A = D\varphi(p)$, daß

$$d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_n = (\det D\varphi)\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n.$$

Also

$$\begin{aligned}\varphi^*\omega &= (f \circ \varphi)\, d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_n \\ &= (f \circ \varphi)(\det D\varphi)\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n\end{aligned}$$

und $g = (f \circ \varphi)(\det D\varphi)$.

(b) Die Jacobi-Matrix der Polarkoordinaten Abbildung ist

$$D\varphi(r, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

Wenn $(f_1, f_2, f_3) := (x, y, z)$, dann

$$(f_1 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi, f_3 \circ \varphi) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta),$$

und

$$(g_1, g_2, g_3) = (f_1 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi, f_3 \circ \varphi) D\varphi(r, \theta, \varphi) = (r, 0, 0).$$

Also $\varphi^*\omega_1 = r\, dr$.

Da $\det D\varphi(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta$, erhalten wir aus (a)

$$\varphi^*\omega_2 = r^2 \sin\theta\, dr \wedge d\theta \wedge d\phi.$$

2. In allgemein, nein. Für alle $p \in U$

$$\begin{aligned}\left[\varphi^*(f\omega)\right](p) &= (\varphi'(p))^* \big((f\omega)\big(\varphi(p)\big)\big) \\ &= (\varphi'(p))^* \big(f\big(\varphi(p)\big)\omega\big(\varphi(p)\big)\big) \\ &= f\big(\varphi(p)\big)\, (\varphi'(p))^*\, \omega\big(\varphi(p)\big) \\ &= (f \circ \varphi)(p)(\varphi^*\omega)(p).\end{aligned}$$

Also $\varphi^*(f\omega) = (f \circ \varphi)\varphi^*\omega$.

Übung 6: Lösungen

1.

$$\begin{aligned}
d\omega &= x_4\, dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + x_2\, dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + x_3\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + x_1\, dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\
&\quad + x_2\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_1\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&= -x_4\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + x_2\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&\quad + x_3\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - x_1\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&\quad + x_2\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_1\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
&= -x_4\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + 2x_2\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
df &= dx + dy + dz \\
dg &= yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz \\
df \wedge dg &= xz\, dx \wedge dy + xy\, dx \wedge dz + yz\, dy \wedge dx + xy\, dy \wedge dz + yz\, dz \wedge dx + xz\, dz \wedge dy \\
&= (x-y)z\, dx \wedge dy + (x-z)y\, dx \wedge dz + (y-z)x\, dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
0 = d\omega &= \frac{\partial f}{\partial y}\, dy \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz \wedge dx + 2x\, dx \wedge dy + dz \wedge dy + 3x^2\, dx \wedge dz + dy \wedge dz \\
&= \Big(-\frac{\partial f}{\partial y} + 2x\Big)\, dx \wedge dy + \Big(-\frac{\partial f}{\partial z} + 3x^2\Big)\, dx \wedge dz
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z} = 3x^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} f(x,y,z) = 2xy + g(x,z) \\ 3x^2 = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} f(x,y,z) = 2xy + g(x,z) \\ g(x,z) = 3x^2 z + h(x) \end{cases}$$

$$\iff f(x,y,z) = 2xy + 3x^2 z + h(x),$$

wobei $h(x)$ eine beliebige Funktion von x ist.

4. Sei $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Wenn ω eine stetig differenzierbare k-Form in V ist, dann ist $\varphi^*\omega$ eine stetig differenzierbare k-Form in U. Die k-Form $\varphi^*\omega$ ist geschlossen, weil $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega) = 0$. Also ist $\varphi^*\omega$ exakt: es gibt eine zweimal stetig differenzierbare $(k-1)$-Form η in U, so daß $\varphi^*\omega = d\eta$. Dann

$$\omega = (\varphi^*)^{-1}(d\eta) = (\varphi^{-1})^* d\eta = d\big((\varphi^{-1})^*\eta\big),$$

wobei $(\varphi^{-1})^*\eta$ eine (zweimal) stetig differenzierbare $(k-1)$-Form ist. Also: Jede geschlossene stetig differenzierbare k-Form in V ist exakt.

Übung 7: Lösungen

(a) Für $p = (x, y, z) \in S^2$ ist das äußere Normalenfeld $\nu(p) = (x, y, z)$. Die Karte (U, φ) gehört zur induzierten Orientierung, wenn für alle $(\theta, \phi) \in U$

$$D := \det \left[\nu(\varphi(\theta, \phi)), \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right] > 0.$$

Hier

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= (\cos\theta \cos\phi, \cos\theta \sin\phi, -\sin\theta) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} &= (-\sin\theta \sin\phi, \sin\theta \cos\phi, 0) \end{aligned}$$

und

$$D = \det \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} = \sin\theta > 0 \quad \text{on }]0, \pi[.$$

(b) Nach der Proposition gilt

$$\int_{S^2} \omega = \int_U \varphi^* \omega.$$

Wir müssen berechnen

$$\varphi^*\omega = (x \circ \varphi)\, d(y \circ \varphi) \wedge d(z \circ \varphi) + (y \circ \varphi)\, d(z \circ \varphi) \wedge d(x \circ \varphi) + (z \circ \varphi)\, d(x \circ \varphi) \wedge d(y \circ \varphi).$$

Da

$$\begin{aligned} d(x \circ \varphi) &= \cos\theta\cos\phi\, d\theta + (-\sin\theta\sin\phi)\, d\phi \\ d(y \circ \varphi) &= \cos\theta\sin\phi\, d\theta + \sin\theta\cos\phi\, d\phi \\ d(z \circ \varphi) &= -\sin\theta\, d\theta, \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} d(y \circ \varphi) \wedge d(z \circ \varphi) &= \sin^2\theta\cos\phi\, d\theta \wedge d\phi \\ d(z \circ \varphi) \wedge d(x \circ \varphi) &= \sin^2\theta\sin\phi\, d\theta \wedge d\phi \\ d(x \circ \varphi) \wedge d(y \circ \varphi) &= \sin\theta\cos\theta\sin^2\phi\, d\theta \wedge d\phi + \sin\theta\cos\theta\cos^2\phi\, d\theta \wedge d\phi \\ &= \sin\theta\cos\theta\, d\theta \wedge d\phi. \end{aligned}$$

Also

$$\varphi^*\omega = (\sin^3\theta\cos^2\phi + \sin^3\theta\sin^2\phi + \sin\theta\cos^2\theta)\, d\theta \wedge d\phi = \sin\theta\, d\theta \wedge d\phi$$

und

$$\int_U \varphi^*\omega = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \right) d\phi = 4\pi.$$

(c) $dw = 3\, dx \wedge dy \wedge dz$, also

$$\int_{S^2} \omega = \int_B d\omega = 3 \int_B dx dy dz = 3 \text{Vol}\,(B) = 4\pi.$$

(d) Man rechnet $d\omega = (n+1)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$. Wenn S^n durch das äußere Normalenfeld orientiert wird, gilt nach dem Stokesschen Integralsatz

$$\text{Vol}_{\,n}(S^n) = \int_{S^n} \omega = \int_{B_{n+1}} d\omega = (n+1) \int_{B_{n+1}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1} = (n+1) \text{Vol}_{\,n+1}(B_{n+1}).$$