Differentialformen
SS2000 AP
19.4.2000

Übung 1

1. Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V und $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ die duale Basis von V^*. Man zeige, daß $\mathcal{B}^k := \{\omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$ eine Basis von $\otimes^k V^*$ ist. Also $\dim \otimes^k V^* = n^k$.

2. Es sei $\mathrm{Alt}\,\omega$ die Alternierung von $\omega \in \otimes^k V^*$. Man zeige, daß Alt folgende Eigenschaften erfüllt:

(a) $\mathrm{Alt}\,\omega \in \wedge^k V^*$ für jede $\omega \in \otimes^k V^*$.

(b) $\omega \in \wedge^k V^* \iff \mathrm{Alt}\,\omega = \omega$.

(c) $\mathrm{Alt} : \otimes^k V^* \to \wedge^k V^*$ ist linear und surjektiv.

3. Es sein $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in V^*$. Man berechne

$$(3\omega_2 \wedge \omega_3 - \omega_1 \wedge \omega_3) \wedge (\omega_1 - 2\omega_2).$$

4.* Es sei V ein n-dimansionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine alternierenden k-Form $\omega \in \wedge^k V^*$ heißt *zerlegbar*, wenn man $\mu_1, \dots, \mu_k \in V^*$ finden kann, so daß $\omega = \mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_k$.

Ist jede alternierende 2-Form $\omega \in \wedge^2 V^*$ zerlegbar?

Hinweis: Die Antwort hängt von n ab. Zuerst betrachte man die Falle mit $n = 2$ und $n = 3$. Für $n = 4$ kann die 2-Form $\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_4$ nützlich sein. Hier bezeichnet $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ eine Basis von V^*.

Übung 2

1. Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$, $v \in V$ und $\omega \in \wedge^k V^*$. Wir definieren $\iota_v \omega$ durch

$$\iota_v \omega(v_1, \ldots, v_{k-1}) := \omega(v, v_1, \ldots, v_{k-1}), \qquad \text{für alle } v_1, \ldots, v_{k-1} \in V.$$

(a) Man zeige, daß $\iota_v \omega \in \wedge^{k-1} V^*$. Es sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V und $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ die duale Basis von V^*. Wir setzen

$$\omega_I := \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k} \qquad \text{mit } i_1 < \cdots < i_k.$$

Man schreibe $\iota_v \omega_I$ als Linearkombination der Basis Vektoren $\omega_{h_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{h_{k-1}}$ $(1 \leq h_1 < \cdots < h_{k-1} \leq n)$ von $\wedge^{k-1} V^*$.

(b) Es sei $\omega \in \wedge^n V^*$ von Null verschieden. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} V &\to \wedge^{n-1} V^* \\ v &\mapsto \iota_v \omega \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

(c) Es sei $\omega := \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$. Nach (b) ist $\mathcal{B}_\iota := \{\iota_{e_1}\omega, \ldots, \iota_{e_n}\omega\}$ eine Basis von $\wedge^{n-1} V^*$. Man schreibe die Elementen von $\mathcal{B}_\iota$ als Linearkombinationen der Vektoren aus der Basis $\{\omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_h} \wedge \cdots \wedge \omega_n : h = 1, \ldots, n\}$ von $\wedge^{n-1} V^*$. Dabei bedeutet das Dach über ω_h, daß ω_h wegzulassen ist.

2. Es seien $\omega_1, \ldots, \omega_k \in V^*$. Man zeige, daß $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$ genau von Null verschieden ist, wenn $\omega_1, \ldots, \omega_k$ linear unabhängig sind.

Insbesondere: $\omega \wedge \omega = 0$ für alle zerlegbaren $\omega \in \wedge^k V^*$.

Übung 3

1. Es sei $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ der Raum der reellen $n \times n$-Matrizen.

(a) Ist die Menge

$$GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$$

der invertierbaren Matrizen eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n^2}$?
Hinweis: $GL_n(\mathbb{R})$ ist offen in $M_n(\mathbb{R})$.

(b)* Es sei $S_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ der Vektorraum der $n \times n$ symmetrischen Matrizen: wenn A^t die Transponierte von A bezeichnet, dann ist

$$S_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = A\}.$$

Wir schreiben I für die $n \times n$ Einheitsmatrix. Es sei $O(n)$ die Menge der orthogonalen Matrizen in $M_n(\mathbb{R})$, d.h.

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t A = I\}.$$

Man zeige, daß $O(n)$ eine Untermannigfaltigheit von $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ist. Welcher Dimension?
Hinweis: $O(n) = F^{-1}(0)$ mit $F : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ gegeben durch $F(A) := A^t A - I$. Man benutze die Regeln der Analysis, um die Ableitung $F'(A)$ zu rechnen. Man zeige, daß die Gleichung $F'(A) = B$ eine Lösung A für jedes $B \in S_n(\mathbb{R})$ hat. Wenn $B \in S_n(\mathbb{R})$ und $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ eine Funktion ist, dann ist eine Lösung von $f(X) = B/2$ auch eine Lösung von $f(X) + f(X)^t = B$.

2. Es sei $T \subset R^3$ die Umdrehnungsfläche, die man bei Drehnung des Kreises

$$(x-2)^2 + z^2 = 1$$

um der z-Axis erhält. Man schreibe eine Karte (U, φ) für T, so daß $(0,1,0) \in \varphi(U)$.

Differentialformen
SS2000 AP
22.5.2000

Übung 4

1. (a) Es sei M eine beliebige (2-dimensionale) Fläche in $\mathbb{R}^3$ in der Darstellung $z = f(x, y)$. Man finde den Tangentialraum T_pM und den Raum der Normalenvektoren N_pM an M im Punkt $p = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

(b) Es seien M eine beliebige (2-dimensionale) Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit Karte $(U, \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3))$ und $p = \varphi(u_0, v_0) \in M$ mit $(u_0, v_0) \in U$. Man finde T_pM und N_pM.

(c) Man finde T_pM und N_pM wenn $p = (0, 1, 1)$ und:

(1) $M : z = 2x^2 + y^2$ (elliptische Paraboloid).

(2) $$M : \begin{cases} x = u\cos(\frac{\pi}{2}v) \\ y = u\sin(\frac{\pi}{2}v) \\ z = v^2 \end{cases} \qquad \text{mit } v > 0 \text{ (ein Teil eines geraden Konoid).}$$

2. Man beschreibe den Tangentialraum $T_IO(n)$ an $O(n)$ in der Einheitsmatrix I als Untervektorraum von $M_n(\mathbb{R})$.

Hinweis: Nach Übung 3 ist $O(n) = F^{-1}(0)$, wobei $F : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ mit $A \mapsto A^tA - I$ eine Submersion in einer Umgebung von I ist.

Übung 5

1. (a) Seien U and V offene Mengen in $\mathbb{R}^n$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : V \to U \subset \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung und

$$\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

eine n-Form in U. Dann ist

$$\varphi^*\omega = (f \circ \varphi)\, d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_n$$

mit $d\varphi_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\, dt_j$ (vgl. Satz in 3.4). Man finde $g : V \to \mathbb{R}$, so daß

$$\varphi^*\omega = g\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n.$$

(b) Die Polarkoordinaten Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi :\quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \phi) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

ist definiert durch

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\phi \\ y = r \sin\theta \sin\phi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

In einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ seien die Differentialformen

$$\begin{aligned} \omega_1 &= x\, dx + y\, dy + z\, dz, \\ \omega_2 &= dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

gegeben. Sei $V = \varphi^{-1}(U)$ und

$$\begin{aligned} \varphi^*\omega_1 &= g_1\, dr + g_2\, d\theta + g_3\, d\phi, \\ \varphi^*\omega_2 &= G\, dr \wedge d\theta \wedge d\phi. \end{aligned}$$

Man berechne die Funktionen $g_j, G : V \to \mathbb{R}$.

[Man nennt $\varphi^*\omega_j$ die Darstellung von ω_j in Polarkoordinaten.]

2. Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $\varphi : V \to U \subset \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Weiter seien $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ω eine k-Form in U. Gilt die Gleichung

$$\varphi^*(f\omega) = f(\varphi^*\omega)?$$

Differentialformen
SS2000 AP
19.6.2000

Übung 6

1. Sei ω die 2-Form in $\mathbb{R}^4$

$$\omega = x_2 x_4 \, dx_1 \wedge dx_3 + x_1 x_3 \, dx_2 \wedge dx_4 + x_1 x_2 \, dx_3 \wedge dx_4.$$

Man schreibe $d\omega$ bezüglich der kanonischen Basis $\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3} : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 4\}$ von $\Omega^3(\mathbb{R}^4)$.

2. In $\mathbb{R}^3$ seien gegeben

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x + y + z, \\ g(x,y,z) &= xyz. \end{aligned}$$

Man berechne das äußere Produkt $df \wedge dg$.

3. Man bestimmte die Funktionen $f(x,y,z)$, für die die 1-Form

$$\omega = f(x,y,z)\, dx + (x^2 - 3y + z)\, dy + (x^3 + y - 3z)\, dz$$

geschlossen ist.

4. Seien U and V diffeomorphische offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, daß jede stetig differenzierbare geschlossene k-Form ($k \geq 1$) in U exakt ist. Gilt dieselbe Eigenschaft auch für die stetig differenzierbare geschlossene k-Formen in V?

[*Hinweis:* Man betrachte φ^*, wobei $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.]

Übung 7

Das Rechnen von Integralen wird durch folgende Proposition vereinfacht:

Proposition: *Sei (M,σ) eine k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$, W eine offene Teilemenge von $\mathbb{R}^n$ mit $M \subset W$, und $A \subset M$ eine kompakte Teilmenge. Wenn es eine positiv orientierte Karte (U,φ) von M gibt mit $A = \overline{\varphi(U)}$ (wobei $^-$ der Abschluß in M bezeichnet), dann gilt für jede stetig k-Form in W*

$$\int_A \omega = \int_{\varphi(U)} \omega := \int_U \varphi^* \omega.$$

Allgemeiner: wenn eine Familie von positiv orientierten Karten $\{(U_j,\varphi_j)\}_{j=1}^q$ von M gibt, so daß $A = \cup_{j=1}^q \overline{\varphi_j(U_j)}$ und $\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = \emptyset$ für alle $i,j \in \{1,2,\ldots,q\}$ mit $i \neq j$, dann gilt

$$\int_A \omega = \sum_{j=1}^q \int_{\varphi_j(U_j)} \omega := \sum_{j=1}^q \int_{U_j} \varphi_j^* \omega.$$

(a) Sei ω die 2-Form in $\mathbb{R}^3$

$$\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy.$$

Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit der kanonischen Orientierung. Sei $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$. Dann ist (U,φ) mit

$$U = \{(\theta,\phi) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in]0,\pi[, \phi \in]0,2\pi[\}$$
$$\varphi(\theta,\phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

ist eine Karte von S^2 (die Polarkoordinaten in S^2). S^2 ist der Rand ∂B der Einheitskugel $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Gehört (U,φ) zu der induzierten Orientierung von $S^2 = \partial B$?

[*Hinweis:* Der induzierten Orientierung von S^2 entspricht das äußere Normalenfeld]

(b) Man benutze die obige Proposition, um das Integral $\int_{S^2} \omega$ zu berechnen.

(c) Man berechne $\int_{S^2} \omega$ mit dem Stokesschen Integralsatz:

$$\int_{S^2} \omega = \int_B d\omega,$$

wenn S^2 die induzierte Orientierung hat.

(d) Die n-Form in $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$$

sei gegeben. Es seien

$$\begin{aligned} S^n &:= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}, \\ B_{n+1} &:= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq 1\} \end{aligned}$$

die Einheitskreis bzw die Einheitskugel in $\mathbb{R}^{n+1}$. Hier bezeichnet $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm in $\mathbb{R}^{n+1}$. Man kann zeigen, daß die Gleichung

$$\int_{S^n} \omega = \mathrm{Vol}_n(S^n) \quad (= \text{das } n\text{-dimensionale Volumen von } S^n)$$

gilt, wenn S^n durch das äußere Normalenfeld orientiert wird (vgl. Teil (c) für $n = 2$, und S. 140 und Satz 3, S. 245, in [F] für alle n).

Man finde eine Relation zwischen $\mathrm{Vol}_n(S^n)$ und $\mathrm{Vol}_{n+1}(B_{n+1})$.