FONCTIONS Θ-HYPERGÉOMÉTRIQUES ET Θ-BESSEL LIÉES AUX SYSTÈMES DE RACINES : QUELQUES RÉSULTATS ET PROBLÈMES OUVERTS

ANGELA PASQUALE

Introduction

Le but de cet article et d'introduire deux familles de fonctions spéciales liées aux systèmes de racines et de décrire les problèmes ouverts liés à leur étude et à l'analyse harmonique qui leur est associée. Les fonctions dans la première famille sont appelées fonctions Θ-hypergéométriques [33], [24]. Elles sont des solutions du système d'équations hypergéométriques de Heckman et Opdam, et un cas particulier important est celui des fonctions hypergéométriques de Heckman et Opdam (voir [17], [29], [30] et leurs références). Les fonctions Θ-hypergéométriques sont une généralisation soit des fonctions sphériques sur les espaces symétriques riemanniens de type non-compacts et compacts, soit des fonctions sphériques sur une classe remarquable d'espaces symétriques non-riemanniens, appelés les espaces symétriques non-compactament causaux. Les fonctions dans la deuxième famille sont appelées fonctions Θ-Bessel. Elles sont des solutions du système d'équations de Bessel de Opdam et ont été introduites très récemment dans le travail de Ben Saïd et Ørsted [1]. Un cas particulier important est celui des fonctions Bessel liées aux systèmes de racines de Opdam (voir [27], [36], [5] et leurs références). Les fonctions Θ-Bessel sont une généralisation des fonctions sphériques sur les espaces symétriques de type euclidien.

Table des matières

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 33C67 ; Secondary 43A90, 43A85.

Key words and phrases. Fonctions hypergéométriques, fonctions Bessel, fonctions Θ-hypergéométriques, fonctions Θ-Bessel, espaces symétriques, espaces symétriques non-compactement causaux.

Cet article est basé sur l'exposé fait le 25 mars 2005 au Groupe de Recherche Interuniversitaire "Analyse Harmonique Invariante sur les Espaces Symétriques Réductifs", Institut de Mathématiques de Jussieu/Chevaleret, Paris.

1. Systèmes hypergéométrique et de Bessel

Les données de départ pour introduire les fonctions Θ-hypergéométriques et Θ-Bessel sont un triplet $(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$, où :

– $\mathfrak{a}$ est un espace euclidien réel de dimension finie n et de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$;

– Σ est un système de racines dans l'espace dual $\mathfrak{a}^*$ de $\mathfrak{a}$;

– m est une fonction de multiplicité sur Σ, c'est-à-dire $m : \Sigma \to \mathbb{C}$ est une fonction invariante par rapport au groupe de Weyl W de Σ. Si on pose $m_\alpha := m(\alpha)$, on a alors $m_{w\alpha} = m_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Sigma$ et $w \in W$.

La dimension n de l'espace $\mathfrak{a}$ est appelée le *rang* du triplet $(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$. L'espace $\mathfrak{a}^*$ est muni de la structure d'espace euclidien induite par celle de $\mathfrak{a}$. En effet, pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$ il existe un élément unique $A_\lambda \in \mathfrak{a}$ tel que $\lambda(H) = \langle A_\lambda, H \rangle$ pour tout $H \in \mathfrak{a}$; on pose alors $\langle \lambda, \mu \rangle := \langle A_\lambda, A_\mu \rangle$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathfrak{a}^*$. On rappelle que le groupe de Weyl de Σ est le groupe fini de transformations orthogonales de $\mathfrak{a}$ engendré par les réflections r_α avec $\alpha \in \Sigma$, où

$$r_\alpha(H) := H - 2\frac{\langle A_\alpha, H \rangle}{\langle A_\alpha, A_\alpha \rangle} A_\alpha \,, \qquad H \in \mathfrak{a} \,.$$

Le groupe de Weyl agit sur $\mathfrak{a}^*$ par dualité selon

$$r_\alpha(\lambda) := \lambda - 2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \,, \qquad \lambda \in \mathfrak{a}^* \,.$$

L'action du groupe de Weyl s'étend par $\mathbb{C}$-linéarité aux complexifications $\mathfrak{a}_\mathbb{C} := \mathfrak{a} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ et $\mathfrak{a}^*_\mathbb{C} := \mathfrak{a}^* \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^*$, respectivement.

On note $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\Sigma)$ l'ensemble des multiplicités sur le système de racines Σ. Il est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ qui peut être identifié avec $\mathbb{C}^d$ où d est le nombre des orbites de W sur Σ. On écrira $m \geq 0$ lorsque $m_\alpha \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. Le système Σ est dit *réduit* si $2\alpha \notin \Sigma$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. On dit qu'une fonction de multiplicité est *paire* (ou que les multiplicités sont paires) lorsque Σ est un système de racines réduit et $m_\alpha \in 2\mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. Ici $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers positifs. On dit qu'un triple $(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$ est *géométrique* lorsqu'elle est associée à un espace symétrique riemannien de type non-compact G/K.

On remarque que la notation utilisée par la suite correspond à la théorie des espaces symétriques. Elle diffère de celle utilisée dans les travaux de Heckman et Opdam dans la façon suivante : le système de racines R de Heckman et Opdam est lié au système Σ par $R := \{2\alpha \mid \alpha \in \Sigma\}$, et la fonction de multiplicité k dans les travaux de Heckman et Opdam est donnée par $k_{2\alpha} = m_\alpha/2$.

1.1. Les espaces $A_\mathbb{C}$, A et T.

Pour tout $\alpha \in \Sigma$ on pose $H_\alpha := A_\alpha / \langle \alpha, \alpha \rangle$. Alors

$$A_\mathbb{C} := \mathfrak{a}_\mathbb{C} / \mathrm{span}_{2\pi i \mathbb{Z}} \{H_\alpha \mid \alpha \in \Sigma\}$$

est un tore complexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$. On note $\exp : \mathfrak{a}_\mathbb{C} \to A_\mathbb{C}$ la projection canonique. On a alors la décomposition $A_\mathbb{C} = AT$ où $A := \exp(\mathfrak{a})$ et $T := \exp(i\mathfrak{a})$. L'application $\exp : \mathfrak{a} \to A$ est une bijection dont l'inverse est dénotée par log. Plus généralement, on notera aussi log l'inverse à plusieurs valeurs de exp. L'action de groupe de Weyl sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ s'étend à une action de W sur A, T et $A_\mathbb{C}$ selon $w(\exp H) := \exp(wH)$.

On fixe par la suite un système de racines positives Σ^+ dans Σ et on pose $\mathfrak{a}^+ := \{H \in \mathfrak{a} \mid \alpha(H) > 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Sigma^+\}$ et $A^+ := \exp \mathfrak{a}^+$. En outre, on note Π les racines simples dans Σ^+. Donc $W \equiv W_\Pi$ est le groupe engendré par les réflexions r_α avec $\alpha \in \Pi$.

Remarque 1.1. L'analyse harmonique des fonctions K-invariantes sur un espace symétrique riemannien de type non-compact G/K ou sur un espace symétrique riemannien de type compact U/K se réduit par restriction à un sous-espace de Cartan à l'analyse harmonique des fonctions

W-invariantes (pour plus de détails, voir [18], Ch. IV). Dans le contexte des fonctions spéciales liées aux systèmes de racines, les espaces A et T jouent donc le même rôle que les espaces G/K et U/K jouent dans l'analyse harmonique K-invariante.

Soit $P := \{\lambda \in \mathfrak{a}_C^* \mid \lambda_\alpha := \frac{\langle \lambda,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z} \text{ pour tout } \alpha \in \Sigma\}$. Alors P est un treillis dans $\mathfrak{a}^*$ qui contient 2Σ. En outre, l'application e^λ définie par $e^\lambda(a) := e^{\lambda(\log a)}$ est à valeurs uniques sur $A_\mathbb{C}$ si et seulement si $\lambda \in P$. Lorsqu'on considère $A_\mathbb{C}$ comme variété algébrique affine, l'algèbre $\mathbb{C}[A_\mathbb{C}] := \mathrm{span}_\mathbb{C}\{e^\lambda \mid \lambda \in P\}$ est l'anneau des fonctions régulières sur $A_\mathbb{C}$.

Remarque 1.2. D'après un théorème de Helgason (voir p.ex. [18], théorème 4.1), le treillis P coïncide avec l'ensemble des poids des représentations K-sphériques irréductibles d'un groupe de Lie compact semi-simple et simplement connexe U (pour lequel K est le sous-groupe des points fixes d'un automorphisme involutif non trivial de U). Dans le cas géométrique, les fonctions sphériques sur l'espace U/K sont des combinaisons linéaires finies d'exponentiels e^λ avec $\lambda \in P$ et se prolongent à la complexification $U_\mathbb{C}/K_C$ comme fonctions holomorphes. Ceci donne une justification géométrique à la définition de l'espace $A_\mathbb{C}$.

Exemple 1.3 (Le cas de rang un)**.** Dans le cas où $\dim \mathfrak{a} = 1$, il y a deux possibilités pour le système Σ : s'il consiste en les deux racines $\pm\alpha$, on dit que Σ est de type A_1 ; s'il consiste en les quatre racines $\pm\alpha$ et $\pm 2\alpha$, on dit que Σ est de type BC_1. On peut identifier $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}^* \equiv \mathbb{R}$ de façon qu'on ait $\alpha \equiv 1$. On suppose maintenant que Σ est de type A_1. Alors $H_{\pm 1} = \pm 1$ et $A_\mathbb{C} \equiv \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}^*$, avec l'application $\exp : \mathfrak{a}_\mathbb{C} \equiv \mathbb{C} \to A_\mathbb{C}$ donnée par $z \mapsto \exp(z)$. Lorsqu'on fixe $\Sigma^+ = \{1\}$, on obtient $\mathfrak{a}^+ =]0, +\infty[$ et $A^+ =]1, +\infty[$. Le groupe de Weyl W contient deux éléments et agit sur $\mathfrak{a}$ selon $\{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$. En outre, $\Pi = \Sigma^+$. En fin, le treillis P coïncide avec l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$.

1.2. **Opérateurs différentiels et opérateurs aux différences.** Soit $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ l'algèbre symétrique sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$, qui consiste en les fonctions polynomiales sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, et soit $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})^W$ la sous-algèbre des fonctions polynomiales W-invariantes. Pour tout $p \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ on note $\partial(p)$ l'opérateur différentiel à coefficients constants correspondant. Par exemple, si $\xi \in \mathfrak{a}$, alors $\partial(\xi)$ est la dérivée directionelle agissant sur une fonction $f : \mathfrak{a} \to \mathbb{C}$ selon $[\partial(\xi)f](H) = \frac{d}{dt} f(H + t\xi)|_{t=0}$ pour $H \in \mathfrak{a}$. On considérera chaque opérateur $\partial(p)$ comme opérateur différentiel sur $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\mathbb{C}, A$ ou bien $A_\mathbb{C}$. La notation $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ sera aussi utilisée pour indiquer l'algèbre commutative des opérateurs différentiels obtenus de cette façon.

Par la suite on dénote par X un sous-ensemble W-invariant de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ ou de $A_\mathbb{C}$, par exemple $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$, A, $A_\mathbb{C}$, … . Pour une $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{R}$ de fonctions sur X on note $\mathbb{D}(\mathcal{R}) := \mathcal{R} \otimes S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{R}$. Le groupe de Weyl agit sur une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ selon $wf(x) := f(w^{-1}x)$ pour tout $w \in W$et $x \in X$. On supposera par la suite que l'algèbre $\mathcal{R}$ est W-invariante. Plus précisément, on considérera dans cet article deux possibilités pour $\mathcal{R}$:

- l'algèbre $\mathcal{R}_{\mathrm{trig}}$ engendrée sur $\mathbb{C}$ par la fonction constante 1 et par $(1 - e^{-2\alpha})^{-1}$ avec $\alpha \in \Sigma$;
- l'algèbre $\mathcal{R}_{\mathrm{rat}}$ engendrée sur $\mathbb{C}$ par la fonction constante 1 et par $1/\alpha$ avec $\alpha \in \Sigma$.

Un exemple important de fonction dans $\mathcal{R}_{\mathrm{trig}}$ est donné par $\coth\alpha$ avec $\alpha \in \Sigma$. En effet

$$\coth\alpha := \frac{1 + e^{-2\alpha}}{1 - e^{-2\alpha}} = \frac{1}{1 - e^{-2\alpha}} - \frac{1}{1 - e^{2\alpha}} \in \mathcal{R}_{\mathrm{trig}}\,.$$

L'action du groupe de Weyl sur $\mathbb{D}(\mathcal{R})$ est donnée pour tout $w \in W$, $f \in \mathcal{R}$ et $p \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ par

$$w\big(f \otimes \partial(p)\big) := wf \otimes \partial(wp)\,,$$

où $\partial(w\xi) := w \circ \partial(\xi) \circ w^{-1}$ pour tout $\xi \in \mathfrak{a}$. On note $\mathbb{D}(\mathcal{R})^W$ la sous-algèbre des opérateurs W-invariants de $\mathbb{D}(\mathcal{R})$.

Exemple 1.4 (Les algèbres $\mathbb{D}_{\text{trig}}$ et $\mathbb{D}_{\text{rat}}$)**.** On pose $\mathbb{D}_{\text{trig}} := \mathbb{D}(\mathcal{R}_{\text{trig}})$ et $\mathbb{D}_{\text{rat}} := \mathbb{D}(\mathcal{R}_{\text{rat}})$. On a

$$\mathrm{L}_{\text{trig}}(m) := L_{\mathfrak{a}} + \sum_{\alpha\in\Sigma^+} m_\alpha \coth\alpha\,\partial(A_\alpha) \in \mathbb{D}_{\text{trig}}^W\,,$$
$$\mathrm{L}_{\text{rat}}(m) := L_{\mathfrak{a}} + \sum_{\alpha\in\Sigma^+} m_\alpha \frac{1}{\alpha}\,\partial(A_\alpha) \in \mathbb{D}_{\text{rat}}^W\,,$$

où $L_{\mathfrak{a}}$ désigne le Laplacien euclidien sur $\mathfrak{a}$, défini par $L_{\mathfrak{a}} := \sum_{j=1}^n \partial(H_j)$ lorsque $\{H_j\}_{j=1}^n$ est une base orthonormée de $\mathfrak{a}$.

Dans le cas géométrique, l'opérateur $\mathrm{L}_{\text{trig}}(m)$ coïncide avec la partie radiale sur un sous-ensemble de Cartan A de l'opérateur de Laplace-Beltrami d'un espace riemannien symétrique de type non-compact (voir p. ex. [18], Ch. II, Proposition 3.9) ; l'opérateur $\mathrm{L}_{\text{rat}}(m)$ coïncide avec la partie radiale sur un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de l'opérateur de Laplace-Beltrami d'un espace riemannien de type euclidien (voir p. ex. [18], Ch. II, Proposition 3.13).

Si $\mathbb{C}[W] := \text{span}_{\mathbb{C}}\{w \mid w \in W\}$ est l'algèbre du groupe W, on note $\mathbb{D}(\mathcal{R}) \otimes \mathbb{C}[W]$ l'algèbre des opérateurs aux différences à coefficients dans $\mathcal{R}$, avec le produit

$$(D_1 \otimes w_1)\cdot(D_2 \otimes w_2) := D_1 w_1(D_2) \otimes w_1 w_2.$$

Les éléments de $\mathbb{D}(\mathcal{R}) \otimes \mathbb{C}[W]$ agissent sur les fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ selon $(D \otimes w)f := D(wf)$. En considérant $D \in \mathbb{D}(\mathcal{R})$ comme élément de $\mathbb{D}(\mathcal{R}) \otimes \mathbb{C}[W]$, on écrira D au lieu de $D \otimes 1$.

On définit une application linéaire $\Upsilon : \mathbb{D}(\mathcal{R}) \otimes \mathbb{C}[W] \to \mathbb{D}[\mathcal{R}]$ par

$$\Upsilon\Big(\sum_{w\in W} D_w \otimes w\Big) := \sum_{w\in W} D_w\,. \tag{1}$$

Alors $\Upsilon(Q)f = Qf$ pour tout $Q \in \mathbb{D}(\mathcal{R}) \otimes \mathbb{C}[W]$ et pour toute fonction W-invariante $f : X \to \mathbb{C}$.

1.3. **Opérateurs de Dunkl et systèmes d'équations différentielles associés.** Pour tout $\xi \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ l'*opérateur de Dunkl trigonométrique* $T(m;\xi)$ est l'opérateur aux différences dans $\mathbb{D}_{\text{trig}} \otimes \mathbb{C}[W]$ défini par

$$T(m;\xi) := \partial(\xi) - \rho(m)(\xi) + \sum_{\alpha\in\Sigma^+} m_\alpha \alpha(\xi)\,\frac{1}{1-e^{-2\alpha}} \otimes (1 - r_\alpha)\,. \tag{2}$$

Dans (2) on a noté

$$\rho(m) := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+} m_\alpha \alpha\,. \tag{3}$$

Les opérateurs de Dunkl trigonométriques ont été introduit par Cherednik [2], ce qui explique les noms différents (p.ex. *opérateurs de Cherednik* ou *opérateurs de Dunkl-Cherednik*), par lesquels on les trouves désignés dans la littérature. Ils agissent sur les espaces de fonctions différentiables. En effet, d'après la formule de Taylor, le terme $1 - r_\alpha$ fait disparaître la singularité apparente qui provient du dénominateur $1 - e^{-2\alpha}$.

Les opérateurs de Dunkl trigonométriques ont la propriété remarquable qu'ils commutent ; voir [15], théorème 1.2 et section 2 dans [29]. Par conséquent l'application $\xi \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \mapsto T(m;\xi)$ s'étende en un homomorphisme d'algèbres commutatives de $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ dans $\mathbb{D}_{\text{trig}} \otimes \mathbb{C}[W]$. On note $T(m;p)$ l'image de $p \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ dans cet homomorphisme. Si $p \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W$, alors $\widetilde{T}(m;p) := \Upsilon\big(T(m;p)\big) \in \mathbb{D}_{\text{trig}}^W$ et l'application $p \mapsto \widetilde{T}(m;p)$ donne un homomorphisme injectif d'algèbres dont l'image sera notée $\mathbb{D}_{\text{trig}}(\mathfrak{a},\Sigma,m)$. On obtient donc un isomorphisme d'algèbres commutatives de $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W$ sur $\mathbb{D}_{\text{trig}}(\mathfrak{a},\Sigma,m)$. Voir [29], théorème 2.12(2), et p. 227–228 dans [15].

Exemple 1.5. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ l'extension $\mathbb{C}$-bilinéaire à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ du produit scalaire de $\mathfrak{a}^*$. Le polynôme p_{trig} défini par $p_{\text{trig}}(\lambda) := \langle\lambda,\lambda\rangle - \langle\rho,\rho\rangle$ est dans $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W$ et on peut vérifier que $\widetilde{T}(m;p_{\text{trig}}) = \mathrm{L}_{\text{trig}}(m)$.

Remarque 1.6. Lorsque le triplet $(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$ est géométrique et associé à l'espace symétrique riemannien de type non-compact G/K, l'algèbre $\mathbb{D}_{\text{trig}}(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$ coïncide avec l'algèbre des parties radiales sur un sous-ensemble de Cartan des opérateurs différentiels G-invariants sur G/K. Voir [11], pp. 128–136.

Définition 1.7. (Heckman et Opdam) Le *système hypergéométrique de paramètre spectrale* $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ est le système d'équations différentielles aux dérivées partielles

$$\widetilde{T}(m;p)\varphi = p(\lambda)\varphi\,, \qquad p \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W\,. \tag{H_λ}$$

Exemple 1.8 (Le cas de rang un)**.** Si $\dim \mathfrak{a} = 1$, le système (H_λ) se réduit à la seule équation différentielle ordinaire correspondante à $p = p_{\text{trig}}$, qui peut être écrite (avec les identifications de l'exemple 1.3 et avec la normalisation $\langle \alpha, \alpha \rangle = 1$ pour le produit scalaire) comme une équation de Jacobi

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \big[m_\alpha \coth t + m_{2\alpha} \coth(2t)\big] \frac{d\varphi}{dt} = (\lambda^2 - \rho^2)\varphi\,, \tag{4}$$

où $\rho := m_\alpha/2 - m_{2\alpha}$. En posant $z := -\sinh^2 t$, l'équation (4) se transforme en l'équation hypergéométrique

$$z(1-z)\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \big[c - (1+a+b)z\big]\frac{d\varphi}{dz} - ab\varphi = 0 \tag{5}$$

avec

$$a = \frac{-\lambda + \rho}{2} \qquad b = \frac{\lambda + \rho}{2} \qquad c = \frac{m_\alpha + m_{2\alpha} + 1}{2}\,. \tag{6}$$

Remarque 1.9. Si $(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$ est associé à l'espace symétrique riemannien de type non-compact G/K, alors (H_λ) coïncide avec le système d'équations différentielles satisfait par la restriction à un sous-espace de Cartan de la fonction sphérique d'Harish-Chandra de paramètre spectrale $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$.

Pour tout $\xi \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ l'*opérateur de Dunkl rationnel* $R(m;\xi)$ est l'opérateur aux différences dans $\mathbb{D}_{\text{rat}} \otimes \mathbb{C}[W]$ défini par

$$R(m;\xi) := \partial(\xi) + \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha(\xi)\, \frac{1}{\alpha} \otimes (1 - r_\alpha)\,. \tag{7}$$

Les opérateurs de Dunkl rationnels ont été introduits par Dunkl [7]. Ils forment une famille commutative, d'où, par les mêmes procédés que plus haut, on obtient des opérateurs $R(m;p)$ avec $p \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ tels que $\widetilde{R}(m;p) := \Upsilon\big(R(m;p)\big) \in \mathbb{D}_{\text{rat}}^W$ pour $p \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W$. En outre, l'application $p \mapsto \widetilde{R}(m;p)$ donne un isomorphisme d'algèbres commutatives de $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W$ dans une sous-algèbre de $\mathbb{D}_{\text{rat}}^W$, qu'on note $\mathbb{D}_{\text{rat}}(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$.

Exemple 1.10. Le polynôme p_{rat} défini par $p_{\text{trig}}(\lambda) := \langle \lambda, \lambda \rangle$ est dans $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W$ et on peut vérifier que $\widetilde{R}(m; p_{\text{rat}}) = \mathrm{L}_{\text{rat}}(m)$.

Définition 1.11. (Opdam) Le *système de Bessel de paramètre spectrale* $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ est le système d'équations différentielles aux dérivées partielles

$$\widetilde{R}(m;p)\varphi = p(\lambda)\varphi\,, \qquad p \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W\,. \tag{B_λ}$$

Exemple 1.12 (Le cas de rang un)**.** Si $\dim \mathfrak{a} = 1$, le système (B_λ) se réduit à la seule équation différentielle ordinaire correspondante à $p = p_{\text{rat}}$, qui peut être écrite (avec les mêmes identifications de l'exemple 1.8) comme équation de Bessel

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \big(m_\alpha + m_{2\alpha}\big)\frac{d\varphi}{dt} = \lambda^2\varphi\,. \tag{8}$$

Remarque 1.13. Si $(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$ est associé à l'espace symétrique riemannien de type non-compact G/K, alors $\mathbb{D}_{\mathrm{rat}}(m)$ coïncide avec les parties radiales sur un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ des opérateurs G_0-invariants sur l'espace symétrique de type euclidien G_0/K où $G_0 := \mathfrak{p} \rtimes K$. En outre, (B_λ) coïncide avec le système d'équations différentielles satisfait par la restriction à $\mathfrak{a}$ de la fonction sphérique d'Harish-Chandra sur G_0/K de paramètre spectrale $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. Voir [27], Remark 6.2.

La particularité du système hypergéométrique est qu'il y a un procédé pour construire explicitement une base de solutions C^∞ pour presque tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. La construction est une extension de la méthode de Frobenius pour déterminer une solution par séries des équations différentielles ordinaires à singularités régulières (en suite étendue à certains systèmes aux dérivées partielles par Harish-Chandra [12]). Dans le cas du système hypergéométrique, la méthode consiste à chercher une solution en série sur A^+ de la forme

$$\Phi(m; \lambda, a) := e^{(\lambda-\rho)(\log a)} \sum_{\mu \in \Lambda} \Gamma_\mu(m;\lambda) e^{-\mu(\log a)} \qquad a \in A^+ , \tag{9}$$

où $\Lambda := \mathrm{span}_{\mathbb{Z}^+} \Pi$ et où les coefficients $\Gamma_\mu(m;\lambda)$ sont déterminés récursivement par substitution dans l'équation $\widetilde{T}(m, p_{\mathrm{trig}})\Phi = p_{\mathrm{trig}}(\lambda)\Phi$. La fonction $\Phi(m;\lambda)$ est appelée la *série de Harish-Chandra* de paramètre spectral λ. Par la suite on utilisera souvent la convention que $\Phi(m;\lambda)$ est la fonction sur A définie par $\Phi(m;\lambda)(a) := \Phi(m;\lambda,a)$.

Théorème 1.14 (Heckman-Opdam)**.** *Soit $\widetilde{P} := \cup_{\alpha\in\Sigma}\{\lambda \in \mathfrak{a}^* \mid \lambda_\alpha \in \mathbb{Z}\}$. Alors pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{P}$ l'ensemble $\{\Phi(m; w\lambda, a) \mid w \in W\}$ est une base pour l'espace des solutions C^∞ de (H_λ) sur A^+.*

Démonstration. Voir [30], p. 32. □

Remarque 1.15.
(1) On peut vérifier que $\Gamma_\mu(m;\lambda) = 0$ pour $\mu \in \Lambda \setminus 2\Lambda$, d'où la somme au deuxième membre de (9) est de fait sur 2Λ.
(2) Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ générique, la série $\sum_{\mu\in\Lambda} \Gamma_\mu(m;\lambda)e^{-\mu(\log a)}$ converge vers une fonction holomorphe de $a \in A^+T$; voir [32], Proposition 1.3.2. Par conséquent (9) se prolonge en une fonction holomorphe sur chaque voisinage tubulaire de A^+ dans $A_{\mathbb{C}}$ sur lequel la fonction $e^{(\lambda-\rho)(\log a)}$ est holomorphe. Pour $m \geq 0$ et $\lambda \in P$, les séries de Harish-Chandra terminent et coïncident avec les polynômes de Jacobi de Heckman et Opdam ; voir p. ex. [17], Proposition 3.1.2.

2. Fonctions Θ-hypergéométriques

Pour tout ensemble $\Theta \subseteq \Pi$ de racines simples positives on considère le groupe parabolique W_Θ de W engendré par le réflexions r_α avec $\alpha \in \Theta$ et on pose $\langle\Theta\rangle^+ := \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\, \Theta \cap \Sigma^+$. On introduit les fonctions c suivantes :

$$\begin{aligned} c^+_\Theta(m;\lambda) &:= \prod_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} \frac{\Gamma\big(\lambda_\alpha + \frac{m_{\alpha/2}}{4}\big)}{\Gamma\big(\lambda_\alpha + \frac{m_{\alpha/2}}{4} + \frac{m_\alpha}{2}\big)} , \\ c^-_\Theta(m;\lambda) &:= \prod_{\alpha\in\Sigma^+\setminus\langle\Theta\rangle^+} \frac{\Gamma\big(-\lambda_\alpha - \frac{m_{\alpha/2}}{4} - \frac{m_\alpha}{2} + 1\big)}{\Gamma\big(-\lambda_\alpha - \frac{m_{\alpha/2}}{4} + 1\big)} , \\ c_\Theta(m;\lambda) &:= c^+_\Theta(m;\lambda)c^-_\Theta(m;\lambda) . \end{aligned} \tag{10}$$

Dans (10) on a posé $m_\alpha := 0$ lorsque $\alpha \notin \Sigma$, et on a adopté la convention usuelle que les produits vides valent 1.

Remarque 2.1. La fonction $c^+_\Theta(m;\lambda)$ est l'analogue de la fonction c d'Harish-Chandra, avec laquelle elle coïncide (à une constante près) dans le cas $\Theta = \Pi$. Voir par exemple [18], Ch. IV, §6. La fonction

$c^-_\Theta(m;\lambda)$ est l'analogue de la fonction c de Krötz et Ólafsson [21], avec laquelle elle coïncide (à une constante près) pour certains choix du triplet $(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$ et de Θ. Voir exemple 2.5 ci-dessous.

Définition 2.2. La fonction Θ-hypergéométrique de paramètre spectrale $\lambda \in \mathfrak{a}^*_\mathbb{C} \setminus \widetilde{P}$ est la fonction définie sur A^+ par

$$\begin{aligned}\varphi_\Theta(m;\lambda,a) &:= \sum_{w\in W_\Theta} c_\Theta(m;w\lambda)\Phi(m;w\lambda,a) \\ &= c^-_\Theta(m;\lambda) \sum_{w\in W_\Theta} c^+_\Theta(m;w\lambda)\Phi(m;w\lambda,a)\,.\end{aligned}$$

Par construction, la fonction $\varphi_\Theta(m;\lambda,a)$ est une solution C^∞ du système hypergéométrique (H_λ) sur A^+.

Remarque 2.3.
(1) Pour des triplets géométriques et pour $\Theta = \Pi$, la combinaison linéaire dans la définition 2.2 donne (à une constante dépendante de m) le développement des fonctions sphériques par rapport à la base du théorème 1.14, comme montré par Harish-Chandra [12]. Ce développement a été utilisé par Heckman et Opdam ([16], [13]) pour définir leurs fonctions hypergéométriques liées aux systèmes de racines. Voir aussi exemple 2.4 ci-dessous. Pour les fonctions sphériques sur les espace symétriques non-compactement causaux (voir exemple 2.5), un développement semblable a été démontré par Ólafsson [22]. Avec des multiplicités arbitraires, le développement de Ólafsson a été utilisé par Unterberger ([39], [40]) pour définir des fonctions de Jacobi de deuxième type. La définition générale 2.2 est parue dans [32] et dans l'appendice de [23].
(2) Chaque fonction Θ-hypergéométrique est bien définie et holomorphe par rapport à la variable a dans un voisinage tubulaire de A^+ dans $A_\mathbb{C}$. Voir remarque 1.15.

Exemple 2.4 (Les fonctions hypergéométriques de Heckman et Opdam)**.** La fonction hypergéométrique $F(m;\lambda,a)$ de Heckman et Opdam est liée à la fonction Θ-hypergéométrique de paramètre spectral λ et avec $\Theta = \Pi$ par la relation

$$F(m;\lambda,a) = \frac{\varphi_\Pi(m;\lambda,a)}{c_\Pi(m;\rho(m))}\,. \tag{11}$$

La normalisation de $F(m;\lambda,a)$ est choisie, conformement au cas géométrique, de façon que

$$F(m;\lambda,e) = 1\,,$$

où e dénote l'élément neutre de A ; avec la normalisation choisie dans (2.2), la fonction $\varphi_\Pi(m;\lambda,a)$ est aussi une fonction holomorphe de la variable m. Voir le théorème 2.8. Si le triplet $(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$ est géométrique et correspond à l'espace symétrique riemannien de type non-compact G/K, alors la fonction $F(m;\lambda,a)$ coïncide avec la restriction à un sous-ensemble de Cartan A de le fonction sphérique de Harish-Chandra de paramètre spectrale λ ; si en outre $\lambda \in P$, alors $F(m;\lambda,a)$ se prolonge en tant que fonction holomorphe de a sur $A_\mathbb{C}$ et coïncide avec la restriction à un tore maximal de la fonction sphérique de paramètre spectral λ de l'espace symétrique compact U/K associé.

Exemple 2.5 (Fonctions sphériques sur les espaces symétriques NCC)**.** Soit G/H un espace symétrique non-riemannien tel que

– G est un groupe de Lie semi-simple, connexe, non-compact et avec centre fini, muni d'un automorphisme involutif non trivial $\tau : G \to G$ tel que τ n'est pas une involution de Cartan ;
– H est un sous-groupe fermé (non-compact) de G tel que $G^\tau_0 \subseteq H \subseteq G^\tau$, où $G^\tau := \{g \in G \mid \tau(g) = g\}$ et G^τ_0 dénote la composante connexe de l'élément neutre dans G^τ.

Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ respectivement les algèbres de Lie de G et H et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces propres de τ de valeurs propres 1 et -1. On remarque que $\mathfrak{q}$ peut être identifié canoniquement à l'espace tangent $T_{eH}(G/H)$. On dit que l'espace symétrique G/H est *irréductible* lorsque $\mathfrak{g}$ n'a aucun idéal propre τ-invariant.

Un espace symétrique irréductible G/H est dit *non-compactement causal* (NCC) lorsqu'il existe un cône convexe ouvert non-vide C dans l'espace tangent $T_{eH}(G/H) \cong \mathfrak{q}$ tel que :

- C ne contient aucune droite affine ;
- chaque $X \in C$ est hyperbolique (c'est-à-dire, l'application adjointe $\operatorname{ad} X$ est diagonalisable avec valeurs propres réelles).

Dans ce cas, on peut supposer que C est maximal par rapport a ces propriétés.

Les exemples les plus simples d'espaces symétriques non-compactement causaux sont les hyperboloïdes $G/H = \mathrm{SO}_0(1,n)/\mathrm{SO}_0(1,n-1)$, pour lesquels le cône de la structure causale est donné par la section verticale sur $T_{eH}(G/H)$ de l'intérieur du cône de la lumière, c'est-à-dire $C = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{q} \equiv \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 - x_1^2 - \dots x_n^2 > 0 \,, x_0 > 0\}$.

Soit θ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ qui commute avec τ, et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan correspondante. On vérifie que l'espace symétrique G/H est NCC si et seulement si $\dim(\mathfrak{q}^{H\cap K} \cap \mathfrak{p}) = 1$, où $K := G^\tau$ et $\mathfrak{q}^{H\cap K} := \{X \in \mathfrak{q} \mid \operatorname{Ad} h(X) = X \text{ pour tout } h \in H \cap K\}$ (voir [19], Theorem 3.1.5). On peut alors choisir un sous-ensemble abélien maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ qui contient $\mathfrak{q}^{H\cap H} \cap \mathfrak{p}$, et on peut vérifier que $\mathfrak{a}$ est aussi abélien maximal en $\mathfrak{p}$ et en $\mathfrak{q}$ ([19], Proposition 3.1.11). Soit Σ l'ensemble des racines restreintes de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. On fixe un ensemble de racines positives et le sous-ensemble Π de racines simples lui correspondant. Si on pose

$$\Theta_0 := \{\alpha \in \Pi \mid \alpha(H) = 0 \text{ pour tout } H \in \mathfrak{q}^{H\cap H} \cap \mathfrak{p}\},$$

alors la cardinalité de Θ_0 est $|\Theta_0| = |\Pi| - 1$ ([19], Lemma 5.5.10). Si $(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$ correspond à G/H et $\Theta = \Theta_0$, le deuxième membre dans la définition 2.2 donne la formule de décomposition de Ólafsson pour la restriction à $\exp(\mathfrak{a} \cap C)$ des fonctions sphériques sur G/H. Les fonctions sphériques ont été ont été introduites sur les espaces symétriques NCC par Faraut, Hilgert et Ólafsson dans [10]. Comme dans le cas riemannien, elles peuvent être définies comme ces fonctions (convenablement normalisées) H-biinvariantes et C^∞ sur $S := H\exp(C) = H\exp(\mathfrak{a}\cap C)H$ qui sont fonctions propres communes de l'algèbre commutative des opérateurs différentiels G-invariants sur G/H [22]. La formule de Ólafsson's a donné la motivation initiale pour la définition 2.2, au moins dans le cas de systèmes de racines réduits (on rappelle que Σ est toujours réduit pour un espace symétrique NCC).

Exemple 2.6 (Le cas où $\Theta = \emptyset$)**.** Lorsque $\Theta = \emptyset$ on a $W_\Theta = \{\mathrm{id}\}$ et $c_\emptyset^+(m;\lambda) = 1$. La fonction Θ-hypergéométrique $\varphi_\emptyset(m;\lambda,a) = c_\emptyset^-(m;\lambda)\Phi(m;\lambda,a)$ est un multiple de la série de Harish-Chandra.

Exemple 2.7 (Le cas de rang un)**.** On suppose que $\dim \mathfrak{a} = 1$, d'où Σ est de type A_1 ou BC_1. Il y a deux possibilités pour Θ : soit $\Theta = \Pi$, et dans ce cas φ_Π est proportionelle à une fonction de Jacobi de premier type, soit $\Theta = \emptyset$, et dans ce cas $\varphi_\emptyset$ est proportionelle à une fonction de Jacobi de deuxième type. Plus précisement on a pour tout $t \in \mathbb{R} \equiv A$

$$\varphi_\emptyset(m;\lambda,t) = n_\emptyset(m;\lambda)\, \frac{(2\cosh t)^{\lambda-\rho}}{\sqrt{\pi}\, 2^{\lambda+m_\alpha/2}}\, \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\, {}_2F_1\left(\frac{\rho-\lambda}{2}, \frac{m_\alpha/2+1+\lambda}{2}; 1-\lambda; \cosh^{-2} t\right) \tag{12}$$

où

$$n_\emptyset(m;\lambda) := \Gamma\big(-\frac{\lambda}{2} - \frac{m_\alpha}{4} + \frac{1}{2}\big)\Gamma\big(-\frac{\lambda}{2} - \frac{m_\alpha}{4} - \frac{m_{2\alpha}}{2} + 1\big),$$

et

$$\varphi_\Pi(m;\lambda,t) = c_\Pi^+(m;\rho(m))\, {}_2F_1\left(\frac{\rho+\lambda}{2}, \frac{\rho-\lambda}{2}; \frac{m_\alpha+m_{2\alpha}+1}{2}; -\sinh^2 t\right). \tag{13}$$

Dans (12) et (13), ${}_2F_1\,(a,b;c;z)$ désigne la fonction hypergéométrique de Gauss (voir p.ex. [9], chapitre 2).

On pose

$$\mathfrak{a}_\Theta := (W_\Theta \cdot \mathfrak{a}^+)^0 \quad \text{et} \quad A_\Theta := \exp(\mathfrak{a}_\Theta)\,. \tag{14}$$

Alors $\mathfrak{a}_\Theta$ est un cône ouvert convexe dans $\mathfrak{a}$. On rappelle que l'ensemble Σ_{i} des racines indivisibles est formé par les racines $\alpha \in \Sigma$ telles que $\alpha/2 \notin \Sigma$. On pose $\Sigma_{\mathrm{i}}^+ := \Sigma \cap \Sigma^+$ et $\langle\Theta\rangle_{\mathrm{i}} := \langle\Theta\rangle \cap \Sigma_{\mathrm{i}}$.

Les propriétés de régularité des fonctions Θ-hypergéométriques sont rassemblées dans le théorème suivant.

Théorème 2.8. (a) ([33], [23]) *On pose*

$$n_\Theta(m;\lambda) := \prod_{\alpha\in\Sigma_{\mathrm{i}}^+\setminus\langle\Theta\rangle_{\mathrm{i}}^+} \Gamma\Big(-\frac{\lambda_\alpha}{2} - \frac{m_\alpha}{4} + \frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(-\frac{\lambda_\alpha}{2} - \frac{m_\alpha}{4} - \frac{m_{2\alpha}}{2} + 1\Big)\,.$$

Alors il existe un voisinage tubulaire W_Θ-invariante U_Θ de A_Θ dans $A_{\mathbb{C}}$ sur lequel

$$\frac{\varphi_\Theta(m;\lambda,a)}{n_\Theta(m;\lambda)}$$

se prolonge en une fonction holomorphe de $(m,\lambda,a) \in \mathcal{M} \times \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times U_\Theta$ qui est W_Θ-invariante par rapport aux variables (λ, a).

(b) ([33]) *On suppose que $m \geq 0$ et on pose*

$$\delta(m) := \prod_{\alpha\in\Sigma^+} |e^\alpha - e^{-\alpha}|^{m_\alpha}\,. \tag{15}$$

Alors la fonction

$$\delta(m;a)\,\frac{\varphi_\Theta(m;\lambda,a)}{n_\Theta(m;\lambda)}$$

se prolonge par continuité sur $\overline{A_\Theta}$ et s'annule sur ∂A_Θ.

(c) ([24]) *On suppose que la fonction de multiplicité m est paire et on pose*

$$e_\Theta(m;\lambda) := \prod_{\alpha\in\Sigma^+\setminus\langle\Theta\rangle^+} \prod_{k=-m_\alpha/2+1}^{m_\alpha/2-1} (\lambda_\alpha - k)\,.$$

Alors il y a un voisinage tubulaire W_Θ-invariant U_Θ de A_Θ dans $A_{\mathbb{C}}$ tel que

$$e_\Theta(m;\lambda)\varphi_\Theta(m;\lambda,a)$$

se prolonge en une fonction holomorphe de $(\lambda,a) \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times U_\Theta$. En outre, il existe un opérateur différentiel W-invariant D_m à coefficients holomorphes dans $A_{\mathbb{C}}$ tel que la fonction Θ-hypergéométrique $\varphi_\Theta(m;\lambda,a)$ est déterminée par l'égalité

$$\delta(m;a)\varphi_\Theta(m;\lambda,a) = (-1)^{d(\Theta,m)}\Big[\prod_{\alpha\in\Sigma^+}\prod_{k=0}^{m_\alpha/2-1}(k^2-\lambda_\alpha^2)\Big]^{-1} D_m\Big(\sum_{w\in W_\Theta} e^{w\lambda(\log a)}\Big) \tag{16}$$

où

$$d(\Theta,m) := \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} m_\alpha/2\,.$$

Remarque 2.9. (1) D'après le théorème 2.8,(a), les singularités en λ de $\varphi_\Theta(m;\lambda,a)$ sont situées le long d'une famille localement finie (mais en général infinie) d'hyperplans complexes qui dépendent de Θ. Plus Θ est grand comme sous-ensemble de Π, moins il y a des λ-singularités. De même, plus Θ est grand, plus l'ensemble A_Θ sur lequel la fonction est définie par rapport à la variable a est aussi grand. Les fonctions les plus régulières sont donc les fonctions hypergéométriques de Heckman-Opdam (pour $\Theta = \Pi$), qui ne présentent aucune singularité en λ et sont définies pour tout $a \in A$. Les fonctions les moins régulières correspondent à $\Theta = \emptyset$ (et sont des multiples des séries de Harish-Chandra). Elles présentent en général des hyperplans singuliers correspondants à chaque racine dans Σ et sont seulement définies sur A^+.

Si Σ est réduit, alors les λ-singularités sont au plus d'ordre 1, sinon elle sont d'ordre au plus égal à 2. Le cas de multiplicité paire est particulièrement simple car il y a seulement un ensemble fini d'hyperplans singuliers.

(2) Lorsque $m \geq 0$, les fonctions Θ-hypergéométriques sont singulières en a le long des murs du domaine A_Θ. L'ordre des singularités est borné supérieurement par l'ordre de zéro de la fonction $\delta(m;a)$, ce qui est une propriété importante pour la définition de la transformation Θ-hypergéométrique (voir la sous-section 4.3). Pour des estimations plus précises des ordres des singularités ainsi que pour des estimations globales des fonctions Θ-hypergéométriques, voir sections 4 et 5 dans [33].

(3) La formule explicite (16) pour les fonctions Θ-hypergéométriques dans le cas de multiplicités paires simplifie grandement l'analyse harmonique liée au fonctions Θ-hypergéométriques. En effet, l'opérateur D_m réduit $\delta(m)\varphi_\Theta(m;\lambda)$ à une somme d'exponentielles, d'où l'analyse harmonique correspondante est réduite essentiellement à l'analyse de Fourier des fonctions W_Θ-invariantes sur le cône $\mathfrak{a}_\Theta$. L'opérateur D_m est lié à un des opérateurs de décalage de Opdam (voir [24]).

3. Fonctions Θ-Bessel

L'origine de la définition des fonctions Θ-Bessel se trouve dans la théorie des contractions des groupes et algèbres de Lie. Les contractions des groupes de Lie ont été introduites dans la physique par Inönü et Wigner [20] en 1953 comme expression mathématique du principe suivant : si la mécanique classique est un cas limite de la mécanique relativiste lorsque les vitesses sont petites par rapport à la vitesse de la lumière, alors le groupe de symétrie de la mécanique classique (c'est-à-dire le groupe de Galilei) doit aussi être une limite convenable du groupe de symétrie de la mécanique relativiste (c'est-à-dire le groupe de Lorentz). Egalement, les représentations unitaires du groupe de Galilei (et donc leurs coefficients matriciels) doivent être limites convenables des représentations unitaires (respectivement, des coefficients matriciels) du groupe de Lorentz. Depuis les années 50, plusieurs auteurs ont étudié ces limites. En 1985, Dooley et Rice [6] considérèrent des contractions d'un groupe de Lie réel semi-simple vers son groupe de déplacements de Cartan. Plus précisement, soit (G,K) une paire symétrique où G est un groupe de Lie semi-simple, connexe, non-compact et de centre fini, et K est un sous-groupe compact maximal dans G. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ respectivement les algèbres de Lie de G et K, et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan correspondante. Le groupe de déplacements de Cartan associé à G est le produit semi-direct $\mathfrak{p} \rtimes K$ pour l'action adjointe de K sur $\mathfrak{p}$. Dooley et Rice montrèrent que chaque représentation unitaire de $\mathfrak{p} \rtimes K$ est la limite d'une suite de séries principales unitaires de G au moyen des contractions $\pi_\varepsilon : \mathfrak{p} \rtimes K \to G$ définies par $\pi_\varepsilon(X,k) := k\exp(\varepsilon X)$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Pour des représentations de classe un, les limites des coefficients matriciels correspondants entraînent que pour tout X dans un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_{\lambda/\varepsilon}\big(\exp(\varepsilon X)\big) = \psi_\lambda(X) \tag{17}$$

uniformément sur les compacts de $\mathfrak{a}$. Dans (17), φ_λ et ψ_λ désignent respectivement les fonctions sphériques de paramètre spectral λ sur l'espace symétrique riemannien de type non-compact G/K et sur l'espace symétrique de type euclidien $\mathfrak{p} \rtimes K/K \cong \mathfrak{p}$. Cette relation de limite est importante car elle nous permet de déduire l'analyse harmonique K-invariante sur $\mathfrak{p} \rtimes K/K$ comme limite de celle sur G/K.

Dans le contexte des fonctions spéciales liées aux systèmes de racines, les fonctions sphériques sur G/K sont des cas particuliers des fonctions hypergéométriques de Heckman et Opdam (voir exemple 2.4), et les fonctions sphériques sur $\mathfrak{p} \rtimes K/K$ sont des cas particuliers des fonctions de Bessel de Opdam (voir exemple 3.3 ci-dessous). Il est donc naturel de chercher à généraliser la limite (17) à ce contexte plus grand. Ce problème a été proposée par Ben Said et Ørsted [1], qui de fait ont considéré une situation encore plus générale en *définissant* une nouvelle large famille de fonctions spéciales, les fonctions Θ-Bessel, comme limite des fonctions Θ-hypergéométriques.

Définition 3.1 (Ben Said et Ørsted)**.** La fonction Θ-Bessel de paramètre spectral $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ est la fonction $\psi_\Theta(m;\lambda)$ définie pour $X \in \mathfrak{a}_\Theta$ par

$$\psi_\Theta(m;\lambda, X) := \lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_\Theta(m, \lambda/\varepsilon, \exp(\varepsilon X)) \tag{18}$$

lorsque cette limite existe.

Remarque 3.2. D'après le théorème 2.8 on pourrait chercher la limite (18) dans un voisinage tubulaire de $\mathfrak{a}_\Theta$ dans $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$. Cette possibilité n'a pas été prise en considération dans [1].

La famille de contractions dans l'arrière-plan de (18) concerne les triplets $(\mathfrak{a}, \Sigma^{(\varepsilon)}, m^{(\varepsilon)})$ où $\Sigma^{(\varepsilon)} := \{\varepsilon\alpha \mid \alpha \in \Sigma\}$ et $m^{(\varepsilon)}_{\varepsilon\alpha} := m_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. Si on dénote respectivement $T^{(\varepsilon)}(m^{(\varepsilon)};\xi)$ et $R^{(\varepsilon)}(m^{(\varepsilon)};\xi)$ les opérateurs de Dunkl trigonométriques et rationnels associés au triplet $(\mathfrak{a}, \Sigma^{(\varepsilon)}, m^{(\varepsilon)})$, alors on a les limites faibles

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0} T^{(\varepsilon)}(m^{(\varepsilon)};\xi/\varepsilon) = T(m;\xi)\,, \\ &\lim_{\varepsilon\to 0} R^{(\varepsilon)}(m^{(\varepsilon)};\xi/\varepsilon) = R(m;\xi)\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Ces limites ont étés obtenues dans des formes semblables par plusieurs auteurs, entre autres Opdam [25], Torossian [38] et Ben Saïd et Ørsted [1].

Les limites (19) et les limites correspondantes pour les opérateurs $\widetilde{T}^{(\varepsilon)}(m^{(\varepsilon)};p)$ et $\widetilde{R}^{(\varepsilon)}(m^{(\varepsilon)};p)$ avec $p \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})^W$ entraînent que, si la limite (18) existe (avec les limites des toutes les dérivées), alors la fonction Θ-Bessel $\psi_\Theta(m;\lambda,X)$ est automatiquement une solution du système de Bessel (B_λ).

Le problème clé de l'existence de la limite (18) reste ouvert dans le cas général. Des exemples particuliers connus et les méthodes différentes de preuve seront discutés dans le reste de cette section. Par la suite, sauf indication du contraire, on suppose que $m \geq 0$.

Exemple 3.3 (Les fonctions de Bessel de Opdam)**.** L'existence de la limite (18) pour $\operatorname{Re} m \geq 0$ et $\Theta = \Pi$ a été démontré par De Jeu ([5], Theorem 4.13 et Corollary 4.14), qui a prouvé que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(m;\lambda/\varepsilon, \exp(\varepsilon X)) = J_W(m;\lambda,X)\,. \tag{20}$$

uniformément en (λ, X) dans les compacts de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^* \times \mathfrak{a}_\mathbb{C}$, où $J_W(m;\lambda,X)$ est la fonction de Bessel de Opdam [27]. La fonction $J_W(m;\lambda,X)$ est la solution unique du système de Bessel (B_λ) qui est régulière et W-invariante en $X \in \mathfrak{a}$, et normalisée par la condition $J_W(m;\lambda,0) = 1$. Dans le cas de rang un on a pour $t \in \mathbb{R}$

$$J_W(m;\lambda,t) = \Gamma\big((m_\alpha + m_{2\alpha} + 1)/2\big) \left(\frac{\lambda X}{2}\right)^{(1-m_\alpha-m_{2\alpha})/2} I_{(m_\alpha+m_{2\alpha}-1)/2}(\lambda t)\,, \tag{21}$$

où

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}$$

est la fonction de Bessel modifiée de premier type (voir [9], 7.2.2 (12)). Si $(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$ est un triplet géométrique associé à l'espace symétrique G/K, on a $J_W(m; \lambda, X) = \psi_\lambda(X)$, où ψ_λ désigne la fonction sphérique de paramètre spectral λ sur l'espace symétrique de type euclidien associé $\mathfrak{p} \rtimes K/K \cong \mathfrak{p}$. La formule (17) montre donc que la fonction $J_W(m; \lambda, X)$ est un candidat naturel pour la limite (18), ce qui rend le cas de $\Theta = \Pi$ très spécial par rapport à ceux de Θ arbitraire.

Dans sa preuve, De Jeu a employé les fonctions de Bessel non-symétriques, en utilisant une preuve par contradiction et le théorème de Montel. Dans le cas de rang un, la limite (20) a été montré par Ben Said et Ørsted [1] au moyen des séries hypergéométriques.

Exemple 3.4 (Le cas de rang un)**.** Le cas de rang un avec $\Theta = \Pi$ ayant déjà été regardé dans l'exemple 3.3, il reste à considérer le cas de $\Theta = \emptyset$. Dans ce cas, on a d'après [35]

$$\psi_\emptyset(m; \lambda, t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\emptyset(m; \lambda/\varepsilon, \varepsilon t) = \frac{2^{1-m_\alpha-m_{2\alpha}}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{\frac{-m_\alpha-m_{2\alpha}+1}{2}} K_{\frac{m_\alpha+m_{2\alpha}-1}{2}}(\lambda t)\,, \tag{22}$$

où

$$K_\nu(z) := \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\pi z)} \tag{23}$$

est la fonction de Bessel modifiée de troisième type (voir [9], 7.2.2(13)).

Pour un système de type A_1 et $m_\alpha = n-1$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 2$, la limite (22) a été déterminée par Ben Saïd et Ørsted [1] en utilisant la formule [9], 3.2 (10) pour la fonction de Legendre de deuxième type.

Exemple 3.5 (Le cas non-compactement causal)**.** On garde la notation de l'exemple 2.5. Les fonctions sphériques sur un espace non-compactement causal G/H admettent une représentation intégrale semblable à la représentation de Harish-Chandra pour les fonctions sphériques sur les espaces symétriques riemanniens de type non-compact. En effet, si N dénote la partie nilpotente dans la décomposition de Iwasawa de G, alors on a une décomposition de Iwasawa généralisée $H \times A \times N \cong HAN \subsetneq G$ et le domain de définition S des fonctions sphériques sur G/H est contenu dans HAN. Soit $a_H(x)$ la composante dans A de $x \in HAN$ dans cette décomposition. Pour $x \in S$ et $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ on pose $a_H(x)^\lambda = e^{\lambda\left(\log a_H(x)\right)}$. Alors

$$\varphi_\lambda(x) := \int_H a_H(xh)^{\lambda-\rho}\, dh$$

est une fonction sphérique pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ pour lequel l'intégrale converge. Le domaine de convergence commun à tout $x \in S$ a été déterminé par Krötz et Ólafsson [21]. Il contient l'ensemble $\mathcal{E} := \{\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^* \mid \mathrm{Re}\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle < 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Sigma^+ \setminus \langle \Theta_0 \rangle^+\}$. Ben Saïd et Ørsted [1] ont montré que pour tout $\lambda \in \mathcal{E}$ et $x \in C$ la limite

$$\psi_\lambda(X) := \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_{\lambda/\varepsilon}(\exp \varepsilon X) \tag{24}$$

existe avec la limite de toutes les dérivées. En outre, on a

$$\psi_\lambda(X) = \int_H e^{\lambda\left(\mathcal{P}(\mathrm{Ad}(h)X\right)}\, dh$$

où $\mathcal{P} : \mathfrak{q} \to \mathfrak{a}$ est la projection orthogonale.

Dans [1], la limite (24) est considérée seulement du point de vue des fonctions spéciales. Pour l'interprétation et l'étude des fonctions ψ_λ en tant que fonctions sphériques sur l'espace pseudo-riemannien flaque $\mathfrak{q} \ltimes H/H \cong \mathfrak{q}$, on refère à [35].

Exemple 3.6 (Le cas de multiplicités paires)**.** On rappelle que dans le cas de multiplicités paires, les fonctions Θ-hypergéométriques admettent la formule explicite (16). Ceci a permis à Ben Said et Ørsted [1] de calculer explicitement la limite (18) : il existe un opérateur différentiel W-invariant D_m^0 à coefficients holomorphes dans $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ tel que la fonction Θ-Bessel $\psi_\Theta(m;\lambda,X)$ est déterminée par l'égalité

$$\psi_\Theta(m;\lambda,X) = \frac{(-1)^{d(\Theta,m)}}{\prod_{\alpha\in\Sigma^+}\lambda_\alpha^{m_\alpha}}\,\frac{D_m^0\Big(\sum_{w\in W_\Theta} e^{w\lambda(X)}\Big)}{\prod_{\alpha\in\Sigma^+}\alpha(X)^{m_\alpha}} \tag{25}$$

où $d(\Theta,m) := \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} m_\alpha/2$. L'operateur D_m^0 est lié à un opérateur rationnel de décalage de [14].

4. Quelques problèmes ouverts

4.1. **Existence et propriétés de régularité.** Comme remarqué dans la section précedente, le problème ouvert le plus important pour les fonction Θ-Bessel est l'existence de la limite qui les défini. On souligne que dans tous les cas particuliers dans lesquels l'existence de la limite a été montrée, la preuve se base sur des propriétés qui ne peuvent pas être utilisées pour approcher le cas général.

Dans le cas $\Theta = \Pi$ la fonction hypergéométrique de Heckman et Opdam de paramètre spectral $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ est caractérisée comme l'unique solution (normalisée) du système (H_λ) qui est W-invariante et holomorphe dans un voisinage de $e \in A$ dans $A_{\mathbb{C}}$. Une propriété analogue caractérise aussi les fonctions de Bessel en tant que solutions de (B_λ). Est-ce qu'on peut déterminer une caracterisation analogue pour des Θ arbitraires ? Une réponse positive nous permettra, comme dans le cas $\Theta = \Pi$ d'avoir un candidat naturel pour la fonction limite de (18).

Toujours dans le cas $\Theta = \Pi$, un outil important pour l'étude des fonctions hypergéométriques et de Bessel sont leur analogues non-symétriques, qui satisfont un système d'équations aux différence de premier ordre. Est-ce qu'il y a des analogues non-symétriques des fonctions Θ-hypergéométriques (ou Θ-Bessel) ?

Le théorème 2.8 donne les propriétés de régularité des fonctions Θ-hypegéométriques. Est-ce qu'on peut prouver un théorème analogue pour les fonctions Θ-Bessel ? On remarque que ce problème est interessant déjà dans le cas non-compactement causal de l'exemple 3.5 : dans [1] l'existence de la limite a été montrée seulement pour des valeurs particulières de $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. Est-ce qu'on peut montrer que les fonctions Θ-Bessel associées à un espace symétrique non-compactement causal admettent un prolongement méromorphe par rapport à la variable λ ? Si la réponse est positive, le long de quels hyperplans dans $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ se trouvent alors les singularités possibles ? Dans le cas de rang un et de multiplicités paires, les réponses à ces questions peuvent être déduites à partir des formules explicites (21) et (24).

4.2. **Réalisation géométrique.** Pour des triplets géométriques $(\mathfrak{a},\Sigma,m)$, les fonctions Θ-hypergéométriques coincident (à une constante multiplicative) avec les fonctions sphériques sur les espaces symétriques riemanniens de type non-compact lorsque $\Theta = \Pi$, et avec les fonctions sphériques sur les espaces symétriques non-compactement causaux lorsque $\Theta = \Theta_0$; voir exemples 2.4 et 2.5. Par correspondance, les fonctions Θ-Bessel coincident (à une constante multiplicative) avec les fonctions sphériques sur les espaces symétriques flâques associés ; voir exemples 3.3 et 3.5. Est-ce que les fonctions Θ-hypergéométriques (ou Θ-Bessel) admettent aussi une realisation géométrique pour des autres valeurs de Θ ?

Une classe d'espaces symétriques qui sont des candidats possibles pour donner une réponse à la demande ci-dessus sont les espaces symétriques K_ε de Oshima et Sekiguchi [31]. Ici ε est une signature des racines. On rappelle brièvement la construction de ces espaces.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre réelle semi-simple avec involution de Cartan θ, et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan correspondante avec $\mathfrak{k} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}$ et $\mathfrak{p} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$. On fixe un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{p}$ et on considère le système de racines Σ du couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Alors on a aussi la décomposition en espaces de racines $\mathfrak{g} = \oplus_{\alpha \in \Sigma \cup \{0\}} \mathfrak{g}^\alpha$ où $\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(X) \text{ pour tout } H \in \mathfrak{a}\}$.

Il y a une correspondance biunivoque entre signatures de racines et sous-ensembles Θ de racines simples Π, la signature $\varepsilon_\Theta : \Sigma \to \{\pm 1\}$ qui correspond à Θ étant donnée par

$$\begin{aligned} \varepsilon_\Theta(\alpha) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in \Theta \\ -1 & \text{si } \alpha \in \Pi \setminus \Theta \end{cases} \\ \varepsilon_\Theta(-\alpha) &= \varepsilon(\alpha) \\ \varepsilon_\Theta(\alpha + \beta) &= \varepsilon_\Theta(\alpha)\varepsilon_\Theta(\beta) \quad \text{si } \alpha, \beta \text{ et } \alpha + \beta \in \Sigma \,. \end{aligned}$$

On associe à chaque Θ une involution σ_Θ de $\mathfrak{g}$ en posant $\sigma(X) := \varepsilon_\Theta(\alpha)X$ pour tout $X \in \mathfrak{g}^\alpha$. En particulier, $\sigma_\Pi = \theta$.

Soit $G_\mathbb{C}$ un groupe de Lie connexe et simplement connexe dont l'algèbre de Lie est la complexification $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ de $\mathfrak{g}$ et soit G le sous-groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors G est un groupe de Lie semi-simple, non-compact, connexe et avec centre fini. Chaque involution σ_Θ de $\mathfrak{g}$ correspond à une involution de G, qu'on dénote par le même symbole σ_Θ. On pose $\mathfrak{k}_\Theta := \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma_\Theta(X) = X\}$ et $\mathfrak{p}_\Theta := \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma_\Theta(X) = -X\}$, d'où $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{p}_\Theta$. Soit K_Θ le sous-groupe de Lie connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_\Theta$. Alors G/K_Θ est l'espace K_ε associé à Θ. Cet espace a deux particularités : $\mathfrak{a}$ est aussi un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}_\Theta$; les restrictions à $A := \exp \mathfrak{a}$ des opérateurs différentiel G-invariants sur G/K_Θ coïncident avec les restrictions à A des opérateurs G-invariants sur G/K. Il est donc naturel de se demander si les fonctions Θ-sphériques, qui sont fonctions propres communes de ces opérateurs, jouent un rôle dans l'analyse harmonique sur G/K_Θ.

La même question peut être posée pour les fonctions Θ-Bessel et l'analyse harmonique sur les espaces symétriques flaques $\mathfrak{p}_\Theta \ltimes K_\Theta/K_\Theta$. Pour un triplet $(\mathfrak{a}, \Sigma, m)$ correspondante à un espace symétrique NCC et $\Theta = \Pi_0$, la réponse à cette question est positive. Pour plus de détails, on réfère à [35].

4.3. **Analyse harmonique.** Les fonctions hypergéométriques de Heckman et Opdam sont les fonctions spéciales qui jouent dans l'analyse harmonique des fonctions W-invariantes sur A le même rôle que les fonctions exponentielles jouent pour l'analyse harmonique sur $\mathbb{R}^n$. L'analyse harmonique W-invariante L^2 liée aux fonctions hypergéométriques (théorème de Paley-Wiener, formule d'inversion, théorème de Plancherel) a été développée dans [29]. Dans [3], Delorme a étudié l'analyse sur l'espace de Schwartz. De la même façon, les fonctions de Bessel sont les fonctions de base pour l'analyse harmonique W-invariante sur $\mathfrak{a}$. Dans ce cas, l'analyse harmonique L^2 et sur l'espace de Schwartz a été développée dans [8], [4] et [5] ; voir aussi [36].

Plusieurs auteurs ont travaillé récemment sur l'analyse harmonique hypergéométrique ou liée aux fonctions de Bessel, et beaucoup de résultats de l'analyse harmonique classique ont été généralisés à ce contexte. Dans le cas générale des fonctions Θ-hypergéométrique avec $\Theta \neq \Pi$ la situation est complètement différente.

La transformation Θ-hypergéométrique d'une fonction W_Θ-invariante $f : A_\Theta \to \mathbb{C}$ et suffisamment régulière est la fonction W_Θ-invariant $\mathcal{F}_\Theta f(m; \cdot)$ définie sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ par

$$\mathcal{F}_\Theta f(m; \lambda) := \frac{1}{|W_\Theta|} \int_{A_\Theta} f(a)\varphi_\Theta(m; \lambda, a)\, \delta(m; a)\, da$$

où δ est comme dans (15). Pour f différentiable C^∞ et de support compact, cette transformation a été introduite et étudiée dans [34], où la formule d'inversion suivante est démontrée : pour tout $a \in A_\Theta$ on a

$$f(a) = \frac{|W|}{|W_\Theta|} \int_{i\mathfrak{a}^*} \mathcal{F}_\Theta f(m; \lambda) E_\Theta(m; -\lambda, a) \frac{d\lambda}{|c_\Theta(m; \lambda)|^2}$$

où

$$E_\Theta(m;\lambda,a)=\frac{c_\Theta(m;\lambda)}{c_\Pi(m;\lambda)}\,\varphi_\Pi(m;\lambda,a)$$

et $d\lambda$ est une normalisation convenable de la mesure de Lebesgue sur $i\mathfrak{a}^*$. Le cas particulier géométrique de la transformation sphérique des fonctions W_0-invariantes sur un espace symétrique NCC a été précédemment introduit dans [10] et une formule d'inversion a été donnée dans [22].

Le théorème de type Paley-Wiener pour la transformation Θ-hypergéométrique donne une caractérisation de l'image par cette transformation des fonctions W_Θ-invariantes sur A_Θ qui sont différentiables C^∞ et de support compact. Ce théorème est connu seulement pour le cas de multiplicités paires et avec une condition technique supplémentaire, appelée la condition A, qui impose soit qu'il n'y a "pas trop" d'hyperplans singuliers (ce qui est une condition sur la fonction de multiplicité m), soit que l'ouverture du cône $\mathfrak{a}_\Theta$ est "suffisamment grande" (ce qui est une condition sur Θ). La condition A est vérifiée par tous les couples (m,Θ) qui correspondent à un espace symétrique K_ε de multiplicités paires, donc dans toutes les situations géométriques dans lesquelles la transformation Θ-hypergéométriques peut être appropriée. L'outil de base de la preuve est la formule explicite des fonctions Θ-hypergéométriques de multiplicités paires. On réfère à [24] pour plus d'informations sur ce théorème. On remarque que, même dans le cas géométrique de la transformation sphérique sur un espace symétrique NCC arbitraire, la détermination d'un théorème de type Paley-Wiener est aujourd'hui un problème ouvert.

Pour ce qui concerne un théorème de type Plancherel pour la transformée Θ-hypergéométrique avec $\Theta\neq\Pi$, il n'y a (sans compter le cas complexe) pratiquement aucun résultat, même dans le cas de rang un. L'unique cas particulier intéressant qu'on trouve dans la littérature est celui de $\mathrm{SO}_0(1,2)/\mathrm{SO}_0(1,1)$, qui est un cas de rang un, avec Σ de type A_1, $\Theta=\emptyset$ et $m=1$. Il a été considéré (dans un contexte différent) par Stein et Wainger [37]. Dans notre notation le résultat de Stein et Wainger est le suivant. Soit $\mathcal{H}^2$ l'espace des fonctions F holomorphes sur $\{\lambda\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Re}\lambda<0\}$ telles que

$$\|F\|^2:=\sup_{\sigma<0}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\sigma+it)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|F(it)|^2\,dt<+\infty\,,$$

et soit $\mathcal{H}^2_*$ le sous-espace des $F\in\mathcal{H}^2$ telles que

$$\|F\|^2_*:=\int_{-\infty}^{+\infty}|F(it)-F(-it)|^2\,\frac{t\,dt}{\tanh t}<+\infty\,.$$

Alors $\mathcal{H}^2_*$ muni de la norme $\|\cdot\|_*$ est un espace de Hilbert, et $f\in L^2(]0,+\infty[,\sinh t\;dt)$ si et seulement si $\mathcal{F}_\emptyset f\in\mathcal{H}^2_*$. En outre,

$$\int_0^{+\infty}|f(t)|^2\,\sinh t\;dt=\frac{1}{8\pi^2}\|\mathcal{F}_\emptyset f\|^2_*\,.$$

On conclut cette section en remarquant qu'une transformation Θ-Bessel pour des fonctions $g:\mathfrak{a}_\Theta\to\mathbb{C}$ qui sont W_Θ-invariantes et suffisamment régulières peut être introduite formellement par la formule

$$\mathcal{G}_\Theta g(m;\lambda):=\frac{1}{|W_\Theta|}\int_{\mathfrak{a}_\Theta}g(X)\psi_\Theta(m;\lambda,X)\,\pi(m;X)\;dX\,,$$

où

$$\pi(m,X):=\prod_{\alpha\in\Sigma^+}\alpha(X)^{m_\alpha}\,.$$

Si $\Theta=\Pi$ cette transformation coïncide avec la transformation introduite par Opdam dans [27], page 353. Lorsque la limite (18) subsiste, elle nous permet de transférer les résultats connus de l'analyse harmonique Θ-hypergéométrique au niveau de la transformation Θ-Bessel. D'un autre côté, on peut espérer qu'un développement indépendant de quelques uns des problèmes encore ouverts dans l'analyse harmonique Θ-hypergéométrique.

Références

[1] S. Ben Saïd et B. Ørsted, *Bessel functions for root systems via the trigonometric setting*, Int. Math. Res. Not. **9**, 551-585 (2005).

[2] I. Cherednik, *A unification of Knizhnik-Zamolodchikov and Dunkl operators via affine Hecke algebras.* Invent. Math. **106**, no. 2, 411–431 (1991).

[3] P. Delorme, *Espace de Schwartz pour la transformation de Fourier hypergéométrique.* (Avec un appendice de Mustapha Tinfou). J. Funct. Anal. **168**, no. 1, 239–312 (1999).

[4] M. De Jeu, *The Dunkl transform*, Invent. Math. **113**, 147-162 (1993).

[5] M. De Jeu, *Paley-Wiener theorems for the Dunkl transform*, Preprint 2004. arXiv :math.CA/0404439. A paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.

[6] A. H. Dooley et J. M. Rice, *On contractions of semisimple Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **289**, no. 1, 185-202 (1985).

[7] C. F. Dunkl, *Differential-difference operators associated to reflection groups.* Trans. Am. Math. Soc. **311**, no. 1, 167–183 (1989).

[8] C. F. Dunkl, *Hankel transforms associated to finite reflection groups.* In : *Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials and applications*, Proceedings of an AMS special session, Tampa 1991, Contemp. Math. **138**, 123–138 (1992).

[9] A. Erdelyi et alii, Higher transcendental functions, vol. 1 et 2, McGraw-Hill, 1953.

[10] J. Faraut, J. Hilgert, et G. Ólafsson, *Spherical functions on ordered symmetric spaces.* Ann. Inst. Fourier **44**, 927–966 (1994).

[11] R. Gangolli et V.S. Varadarajan, *Harmonic Analysis of Spherical Functions on Real Reductive Groups*, Springer Verlag, 1988.

[12] Harish-Chandra, *Spherical functions on a semisimple Lie group. I, II.* Am. J. Math. **80**, 241–310, 553–613 (1958).

[13] G. J. Heckman, *Root systems and hypergeometric functions. II.* Compositio Math. **64**, no. 3, 353–373 (1987).

[14] G. J. Heckman, *A remark on the Dunkl differential-difference operators.* Dans : Harmonic analysis on reductive groups (Brunswick, Ma, 1989), Prog. Math. vol. 101, Birkhäuser Boston, 1991, 181–191.

[15] G. J. Heckman, *Dunkl operators.* Astérisque **245**, Exp. No. 828, 4, 223–246 (1997). Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97.

[16] G. J. Heckman et E. M. Opdam, *Root systems and hypergeometric functions. I.* Compositio Math. **64**, no. 3, 329–352 (1987).

[17] G. Heckman et H. Schlichtkrull, *Harmonic analysis and special functions on symmetric spaces.* Academic Press, 1994.

[18] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis.* Academic Press, New York, 1984.

[19] J. Hilgert et G. Ólafsson, *Causal symmetric spaces. Geometry and Harmonic Analysis.* Academic Press, 1996.

[20] E. Inönü et E. P. Wigner, *On the contraction of groups and their representations*, Proc. Nat. Acad. Sci., US **35**, 510–524 (1953).

[21] B. Krötz et G. Ólafsson, *The c-function for non-compactly causal symmetric spaces*, Invent. Math. **149**, no. 3, 647–659 (2002).

[22] G. Ólafsson, *Spherical functions and spherical Laplace transform on ordered symmetric spaces.* Preprint, 1997. http ://www.math.lsu.edu/~preprints

[23] G. Ólafsson et A. Pasquale, *On the meromorphic extension of the spherical functions on noncompactly causal symmetric spaces.* J. Funct. Anal. **181**, no. 2, 346–401 (2001).

[24] G. Ólafsson et A. Pasquale, *A Paley-Wiener Theorem for the Θ-hypergeometric transform : the even multiplicity case*. J. Math. Pures Appl. **83**, no. 7, 869–927 (2004).

[25] E. M. Opdam, *Root systems and hypergeometric functions. III.* Compositio Math. **67**, no. 1, 21–49 (1988).

[26] E. M. Opdam, *Root systems and hypergeometric functions. IV.* Compositio Math. **67**, no. 2, 191–209 (1988).

[27] E. M. Opdam, *Dunkl operators, Bessel functions and the discriminant of a finite Coxeter group*. Compositio Math. **85**, no.3, 333-373 (1993).

[28] E. M. Opdam. *An analogue of the Gauss summation formula for hypergeometric functions related to root systems.* Math. Z. **212**, 313–336 (1993).

[29] E. M. Opdam, *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras.* Acta Math. **175**, no. 1, 75–121, (1995).

[30] E. M. Opdam, *Lecture notes on Dunkl operators for real and complex reflection groups.* Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2000.

[31] T. Oshima and J. Sekiguchi. *Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric space.* Invent. Math. **57**, 1–81 (1980).

[32] A. Pasquale, *A theory of* Θ*-spherical functions*, Habilitationsschrift, Technische Universität Clausthal, 2002.

[33] A. Pasquale, *Asymptotic analysis of* Θ*-hypergeometric functions*, Invent. Math. **157**, no. 1, 71–122 (2004).

[34] A. Pasquale, *The* Θ*-spherical transform and its inversion*, Math. Scand. **95**, no. 2, 265–284 (2004).

[35] A. Pasquale, *A note on Bessel functions associated with non-compactly causal symmetric spaces*, en préparation.

[36] M. Rösler, *Dunkl Operators : Theory and Applications.* (Lecture Notes for the OP-SF Euro Summer School 2002, Leuven, Belgium.) Dans : Orthogonal Polynomials and Special Functions ; eds. E. Koelink, W. van Assche. Springer Lecture Notes in Math. **1817**, 93–136 (2003).

[37] E. M. Stein et S. Wainger, *Analytic properties of expansions, and some varaints of the Parseval-Placherel formula*, Ark. Math. **5**, no. 37, 553–567 (1965).

[38] C. Torossian, *Une application des opérateurs de Cherednick à l'isomorphisme d'Harish-Chandra pour les espaces symétriques.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **320**, no. 2, 139–144 (1995).

[39] J. Unterberger, *Analyse harmonique sur un espace symétrique ordonné et sur son dual compact.* PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1999.

[40] J. M. Unterberger, *Hypergeometric functions of second kind and spherical functions on an ordered symmetric space*. J. Funct. Anal. **188**, no. 1, 137–155 (2002).

Laboratoire et Département de Mathématiques, Université Paul Verlaine – Metz, France
E-mail address: `pasquale@math.univ-metz.fr`
URL: `http ://www.math.univ-metz.fr/~pasquale`